

---

# MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DE LA TRANSMISIÓN DE DOLENCIAS

---



Sara Iglesias Hernández  
Inés Rodríguez Pérez  
Óscar Rúas Barazal

Trabajo realizado en el bachillerato **STEMbach**  
Bienio 2020/2022

Bajo la dirección conjunta de:

Prof. Dr. Iván Carlos Area Carracedo  
Departamento de Matemática Aplicada II

Prof. Benjamín Macía Fernández  
IES Blanco Amor de Ourense

Universida de Vigo



Ourense, abril de 2022

## RESUMEN

Este trabajo estudia un modelo que nos permite predecir la evolución del número de infectados de una pandemia. Para ello partimos del concepto de derivada, estudiamos diferentes modelos poblacionales para finalmente llegar al modelo SIR.

## PALABRAS CLAVES

Modelo epidemiológico, método de aproximación de Euler, modelo SIR.

## ABSTRACT

This work studies a model that allows us to predict the evolution of the number of infected individuals in a pandemic. For this we start from the concept of derivative, we study different population models to finally arrive at the SIR model

## KEYWORDS

Epidemiological model, Euler's approximation method, SIR model.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Agradecimientos</b>	<b>5</b>
<b>3. Contextualización y justificación de la investigación</b>	<b>5</b>
<b>4. Derivadas y tasas de cambio</b>	<b>5</b>
4.1. Tasa de cambio . . . . .	5
4.2. Movimiento a lo largo de una línea . . . . .	6
4.3. Cambio en la población . . . . .	7
4.4. Cambios en costes e ingresos . . . . .	7
<b>5. Modelos de población simple</b>	<b>7</b>
5.1. Modelo Malthusiano . . . . .	7
5.1.1. Notación . . . . .	7
5.1.2. Obtención de la solución de la ecuación diferencial . . . . .	8
5.1.3. Ejemplo . . . . .	9
5.1.4. Tiempo de duplicación . . . . .	9
5.2. Modelo Logístico . . . . .	10
5.2.1. Estudio cualitativo . . . . .	11
5.2.2. Resolución de la ecuación logística . . . . .	12
5.2.3. Ejemplo . . . . .	13
<b>6. El método de Euler</b>	<b>14</b>
6.1. Ejemplos . . . . .	16
<b>7. Error de truncamiento en el método de Euler</b>	<b>20</b>
7.1. Fórmula de Taylor . . . . .	20
<b>8. Método de Euler para sistemas</b>	<b>22</b>
<b>9. Método SIR</b>	<b>23</b>
<b>10. Caso práctico</b>	<b>26</b>
<b>11. Resultados y conclusiones</b>	<b>26</b>
11.1. Primera aproximación (tabla B) . . . . .	27
11.2. Segunda aproximación (tabla C) . . . . .	27
11.3. Variación del parámetro $k$ (tabla D) . . . . .	27
11.4. Variación del parámetro $b$ (tabla E) . . . . .	28
11.5. Tercera aproximación (tabla F) . . . . .	29
11.6. Cuarta aproximación (tabla G) . . . . .	29

<b>12. Propuesta de continuidad</b>	<b>30</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>30</b>
<b>A. Infectados por día</b>	<b>31</b>
<b>B. Primera aproximación (<math>k = 0.3, b = 0.5</math>)</b>	<b>31</b>
<b>C. Segunda aproximación (<math>k = 0.1, b = 0.6</math>)</b>	<b>33</b>
<b>D. Variación de <math>k</math> (<math>b = 0.6</math>)</b>	<b>35</b>
<b>E. Variación de <math>b</math> (<math>k = 0.1</math>)</b>	<b>37</b>
<b>F. Tercera aproximación (<math>k = 0.08, b = 0.5</math>)</b>	<b>38</b>
<b>G. Cuarta aproximación</b>	<b>40</b>

# 1. Introducción

El presente trabajo tiene como finalidad el estudio de la modelización de determinadas dolencias. La actual pandemia de la COVID-19 puso de manifiesto la necesidad de poder contar con herramientas de precisión que permitan ayudar en la toma de decisiones. En primer lugar, profundizaremos en el concepto de derivada de una función en un punto, introduciendo el concepto de ecuación diferencial y aplicando algunas técnicas elementales para su resolución numérica. Emplearemos estos conocimientos para obtener un modelo que nos permita aproximar la evolución del número de infectados en un caso práctico.

## 2. Agradecimientos

Queremos agradecer al I.E.S. Eduardo Blanco Amor de Ourense la oportunidad que nos ha brindado, dentro del bachillerato STEM, para realizar este trabajo de investigación, a los codirectores su ayuda y disposición siempre que fue necesario y a Luis Civeira por solucionar nuestras dudas con el programa  $\text{\LaTeX}$ .

## 3. Contextualización y justificación de la investigación

STEMBach es un Bachillerato de Excelencia en Ciencias y Tecnología creado al amparo de la Estrategia Gallega de Educación Digital, EDUDixital 2020 de la Xunta de Galicia.

La motivación de este trabajo ha sido la necesidad de contar con modelos matemáticos que permitiesen predecir el avance de la pandemia de COVID-19 para la efectiva toma de decisiones por parte de las autoridades sanitarias.

## 4. Derivadas y tasas de cambio

Buscamos las aplicaciones de la derivada centrándonos en la interpretación de esta como tasa de cambio de una función. Estas aplicaciones incluyen la aceleración y la velocidad en física, el grado del crecimiento de población en biología, y funciones marginales en economía.

### 4.1. Tasa de cambio

Una aplicación de las derivadas es estimar un valor desconocido de una función en un punto usando un valor conocido de esa función en otro punto dado, junto a su tasa de cambio en ese punto.

Si  $f(x)$  es una función definida en el intervalo  $[a, a + h]$ , entonces la tasa de variación de la función es  $f(a + h) - f(a)$ .



### 4.3. Cambio en la población

La tasa de crecimiento de la población es la tasa de cambio de esa población, y por lo tanto puede representarse mediante la derivada del tamaño de la población.

Si  $P(t)$  es el número de individuos presentes en una población en un instante de tiempo  $t$ , entonces la tasa de crecimiento de  $P(t)$  la definimos como  $P'(t)$ .

### 4.4. Cambios en costes e ingresos

Las derivadas son útiles para analizar los cambios en costes, ingresos y beneficios. El concepto de función marginal es común en el campo de la economía y de los negocios, e implica el uso de la derivada. Por lo tanto, si suponemos que:

$C(x)$  → coste para producir  $x$  ítems;

$R(x)$  → ingresos obtenidos por la venta de  $x$  ítems;

$P(x)$  → beneficios obtenidos por la venta de  $x$  ítems ( $P(x) = R(x) - C(x)$ ).

Definimos el beneficio marginal como

$$MP(x) = P'(x) = R'(x) - C'(x),$$

y el coste marginal

$$MC(x) = C'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}.$$

Si  $h$  es igual a 1, obtenemos la aproximación:

$$MC(x) = C'(x) \approx C(x+1) - C(x) \rightarrow \text{coste para producir 1 unidad más,}$$

lo que nos permite concluir si es económicamente beneficioso.

## 5. Modelos de población simple

Ahora estudiaremos la población teniendo en cuenta que: los individuos se desarrollan independientemente; viven en entornos sin restricciones, en los cuales no es posible ninguna forma de competencia. Dependiendo de su tamaño aplicaremos el método malthusiano, en caso de una pequeña población y en una población suficientemente grande, el modelo logístico.

### 5.1. Modelo Malthusiano

#### 5.1.1. Notación

$P(t)$  → población en el instante  $t$ ;

$h$  → intervalo de tiempo;

$bhP$  → número de nacimientos en  $h$  en una población de  $P$  individuos  
( $b$ : tasa de natalidad per capita);

$\mu hP$  → número de fallecimientos en  $h$  en una población de  $P$  individuos  
( $\mu$ : tasa de mortalidad per capita).

La variación de la población en el intervalo  $t$  a  $t + h$ , es

$$P(t+h) - P(t) = bhP - \mu hP = [(bh - \mu h)]P(t).$$

Dividiendo por  $h$  obtenemos

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = (b - \mu)P(t).$$

Calculando el límite cuando  $h \rightarrow 0$  obtenemos

$$\frac{dP}{dt} = (b - \mu)P(t).$$

Si definimos la tasa de crecimiento como  $r \equiv b - \mu$ , obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = rP(t), \tag{1}$$

es decir, la tasa de variación de la población en un instante cualquiera es proporcional al tamaño de la población en ese instante.

### 5.1.2. Obtención de la solución de la ecuación diferencial

Estudiamos la solución de la ecuación diferencial (1).

$$\begin{aligned} P'(t) = r \cdot P(t) &\implies \frac{P'(t)}{P(t)} = r \implies \int \frac{P'(t)}{P(t)} dt = \int r dt \implies \ln |P(t)| = r \cdot t + C \\ &\implies P(t) = e^{rt} \cdot e^C \implies P(t) = ke^{rt}, \end{aligned}$$

donde  $k$  es una constante.

Si suponemos que en el instante  $t = 0$  la población es  $P(0) = P_0$ , entonces

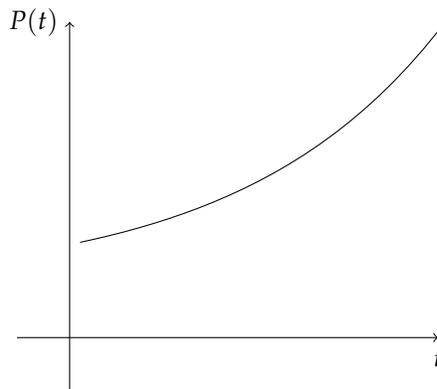
$$P_0 = P(0) = k \cdot e^{r \cdot 0} \implies P_0 = k.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos finalmente

$$P(t) = P_0 \cdot e^{r \cdot t}.$$

Calculando el límite cuando  $t \rightarrow +\infty$ , sabremos la tendencia del número de individuos de la población:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_0 \cdot e^{rt} = P_0 \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{rt} = \begin{cases} +\infty, & r > 0 \rightarrow \text{la población aumenta,} \\ 0, & r < 0 \rightarrow \text{la población disminuye.} \end{cases}$$



Si  $r > 0$  entonces  $P(t)$  crece hacia  $+\infty$  a medida que el tiempo avanza.

### 5.1.3. Ejemplo

Supongamos que la población de la Tierra en el año 1985,  $t = 0$ , era de 4830 millones de habitantes, y que esta crece un 1.73 % anualmente. Queremos estimar cual será la población en el año 2020.

Del enunciado tenemos que  $P_0 = 4830$  y que  $k = \frac{1.73}{100}$ .

Puesto que queremos estimar la población en el año 2020, calculamos  $2020-1985=35$ , por lo que  $t = 35$ .

$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt} \implies P(35) = 4830 \cdot e^{(1.73/100) \cdot 35} = 8849.37$$

De este modo la población estimada es de 8849.37 millones de personas, que es un valor superior al real de algo menos de 8 millones de personas.

### 5.1.4. Tiempo de duplicación

Es el tiempo que tarda una población en duplicar su tamaño, lo representamos por  $t_d$ .

Como  $P(t) = P_0 \cdot e^{k \cdot t}$  tenemos que

$$P(t_d) = 2P_0 \implies t_d = \frac{1}{k} \ln 2.$$

## 5.2. Modelo Logístico

El modelo de Malthus no es el más apropiado cuando el tiempo tiene a infinito, porque la población tendería también a infinito, lo cual no puede ser ya que no hay recursos ilimitados. Esto es debido a que la función  $P(t) = P_0 e^{rt}$ , al ser exponencial, crece sin límites. Varios factores limitan la tasa de crecimiento de una población, en particular: la tasa de natalidad, la tasa de mortalidad, el suministro de alimentos, los depredadores, etc.

Para ajustar el modelo, necesitaremos introducir algunas variables y términos relevantes, como la capacidad de carga y la ecuación logística.

El modelo logístico se ajusta algo más a esta situación, viene determinado por la siguiente ecuación

$$\frac{dP}{dt} = [B(t) - D(t)]P$$

donde:

$P(t) \rightarrow$  población;

$B(t) \rightarrow$  tasa de natalidad;

$D(t) \rightarrow$  tasa de mortalidad.

Observación: si  $B(t) = k(cte)$  y  $D(t) = 0 \rightarrow \frac{dP}{dt} = k \cdot P$ . Es decir, se reduce al modelo Malthusiano.

Si  $D(t)$  es proporcional al número de individuos;  $D(t) = D_0 \cdot P$ , y si  $B(t)$  es constante,  $B(t) = B_0$ . Entonces,

$$\frac{dP}{dt} = (B_0 - D_0 \cdot P)P = B_0 \left(1 - \frac{D_0 \cdot P}{B_0}\right) P = B_0 \left(1 - \frac{P}{\frac{B_0}{D_0}}\right) P.$$

Representando

$r = B_0$ , y

$C = \frac{B_0}{D_0}$ , que llamaremos capacidad de carga de la población y que representa la máxima población de un organismo que el medioambiente puede llegar a sostener indefinidamente.

La ecuación que obtenemos se llama ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = r \left(1 - \frac{P}{C}\right) P. \quad (2)$$

La ecuación logística es no lineal y posiblemente la ecuación no lineal más simple de la que se conoce solución explícita.

### 5.2.1. Estudio cualitativo

Tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } P < C \implies \frac{P}{C} < 1 \implies \frac{dP}{dt} > 0; P \text{ crece;} \\ \text{Si } P > C \implies \frac{P}{C} > 1 \implies \frac{dP}{dt} < 0; P \text{ decrece;} \\ \text{Si } \frac{dP}{dt} = 0 \implies P = 0, \text{ o, } P = C; \text{ no hay variaci3n (soluciones de equilibrio).} \end{array} \right.$$

Las isoclinas,  $\frac{dP}{dt} = cte$ , es decir, curvas soluci3n de la misma pendiente, est3n determinadas por la ecuaci3n  $k = r \left(1 - \frac{P}{C}\right) P$ , donde  $k$  es una constante. La ecuaci3n puede ser escrita

$$P^2 - CP + \frac{kC}{r} = 0.$$

La isoclinas son las l3neas de ecuaci3n:

$$P = \frac{C \pm \sqrt{C^2 - \frac{4kC}{r}}}{2}.$$

Esto nos indica que las pendientes de las curvas soluci3n cumplen

$$C^2 - \frac{4kC}{r} \geq 0,$$

y por tanto

$$k \leq \frac{C \cdot r}{4}.$$

Adem3s, el mayor valor que  $k$  puede tomar es  $k = \frac{C \cdot r}{4}$ , que corresponde a  $P = C/2$ .

Observamos que si  $\frac{dP}{dt} = 0$  entonces  $P(t) = 0$ , o,  $P(t) = C$ .

Adem3s, mediante la segunda derivada, obtenemos informaci3n sobre las soluci3nes de la ecuaci3n log3stica, ya que

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{r^2}{C^2}(C - 2P)(C - P)P$$

y entonces la curva soluci3n  $P$  ser3a convexa en los intervalos  $\left(0, \frac{1}{2}C\right)$ ,  $(C, \infty)$ , c3ncava en  $\left(\frac{1}{2}C, C\right)$  y tendr3a un punto de inflexi3n en  $P = C/2$ .

En la figura 2 se representa el campo de direcciones para  $C = 5$  y  $r = 10$ .

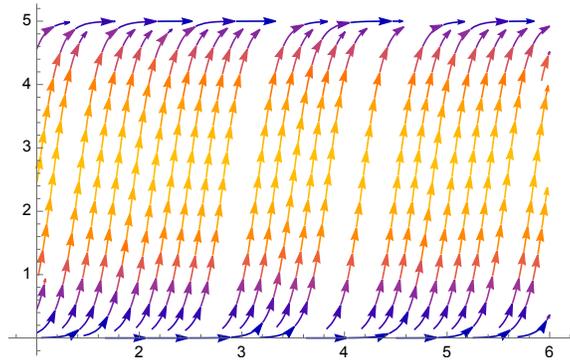


Figura 2: Campo de direcciones de la ecuación logística para  $C = 5$  y  $r = 10$

### 5.2.2. Resolución de la ecuación logística

Pasamos ahora a obtener la solución analítica de la ecuación diferencial (2).

Integrando,

$$\int \frac{C}{(C-P)P} dP = \int r \cdot dt$$

$$\implies -\ln |C-P| + \ln |P| = r \cdot t + C_1 \implies \ln \frac{|P|}{|C-P|} = r \cdot t + C_1$$

$$\implies \ln \left| \frac{P}{C-P} \right| = r \cdot t + C_1 \implies \left| \frac{P}{C-P} \right| = e^{r \cdot t + C_1}.$$

Simplificando la expresión nos queda:

$$P(t) = \frac{C \cdot k}{e^{-rt} + k'}$$

donde  $k$  es una constante dada por

$$k = \frac{P_0}{C - P_0}.$$

De lo expuesto deducimos:

1.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = C$ , no depende de  $P_0$ ; a la larga se va a estabilizar.

2. 
$$P(t) = \frac{C \cdot P_0}{P_0 + (C - P_0) \cdot e^{-rt}}.$$

3. Si  $P_0$  es muy pequeño respecto de  $C \rightarrow \frac{P_0}{C} \simeq 0$ , obtenemos la solución del modelo

de Malthus: 
$$P(t) \simeq \frac{P_0}{e^{-rt}} = P_0 \cdot e^{rt}.$$

### 5.2.3. Ejemplo

La población inicial, medida en miles, de una ciudad es de 20 personas. Después de 10 años ha aumentado a 50.87 y después de 15, a 78.68. Mediante el modelo logístico se pretende estimar la población después de 30 años.

De los datos del problema tenemos,  $P(0) = 20$ ,  $P(10) = 50.87$ ,  $P(15) = 78.68$ , y tenemos que estimar  $P(30)$ . Sustituyendo en la ecuación,

$$P(t) = \frac{20C}{20 + (C - 20)e^{-rt}}$$

La imposición de las dos condiciones auxiliares conduce al siguiente par de ecuaciones para determinar  $r$  y  $C$ :

$$50.87 = \frac{20C}{20 + (C - 20)e^{-rt}}$$
$$78.68 = \frac{20C}{20 + (C - 20)e^{-15r}}$$

Resolviendo obtenemos

$$r \simeq 0.1, \quad C \simeq 500.37.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación, la población sería

$$P(t) = \frac{10007.4}{20 + 480.37e^{-0.1t}}$$

En particular

$$P(30) = \frac{10007.4}{20 + 480.37e^{-3}} = 227.87.$$

La figura 3 representa la solución para los valores obtenidos.

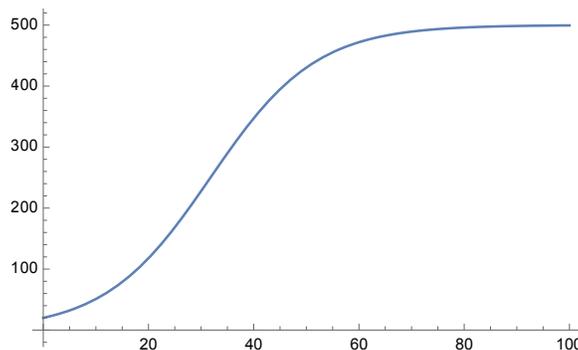


Figura 3: Solución de la ecuación logística para  $C = 500.37$  y  $r = 0.1$ .

## 6. El método de Euler

Leonhard Euler fue un matemático y físico suizo del siglo XVIII (1707–1783) que entre otras aportaciones matemáticas, creó el “Método de Euler”.

Algunas ecuaciones diferenciales se pueden resolver analíticamente. Por otra parte, muchas ecuaciones de este tipo no poseen soluciones expresables como funciones elementales o simplemente solo se quiere ver el comportamiento de la curva solución. En estos casos, la ecuación diferencial se resuelve de forma numérica, de forma que el resultado obtenido es una aproximación de la solución.

Aplicando el Método de Euler, aproximaremos los valores de la solución del problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

en los puntos equiespaciados  $x_0, x_1, \dots, x_n = b$ , de un intervalo  $[x_0, b]$ .

El método de Euler se basa en las siguientes definiciones

1.  $h = \frac{b - x_0}{n}$ ;
2.  $x_i = x_0 + ih$ , para  $i : 1, 2, \dots, n$ ;
3.  $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ , para  $i : 0, 1, \dots, n - 1$ ;

que pasamos a describir a continuación.

1. 
$$h = \frac{b - x_0}{n}$$

La idea de esta definición es escoger un paso constante  $h$  que nos proporciona la distancia entre dos puntos/nodos consecutivos donde haremos la aproximación. Cuanto mayor sea  $n$  menor será el valor del paso  $h$ .

2. 
$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Una vez calculado el paso  $h$ , partiendo del punto inicial  $x_0$  obtenemos los puntos/nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  donde aproximaremos la solución de la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + h, \\x_2 &= x_1 + h, \\&\vdots \\x_i &= x_0 + ih.\end{aligned}$$

$$3. \quad y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad 0 \leq i \leq n - 1$$

Se basa en que la tangente a la curva integral (es decir, a la solución de la ecuación diferencial) en el punto  $x_i$  aproxima los valores de la solución en las proximidades de dicho punto.

En  $x_i$ , la ecuación de la recta tangente a la curva integral es

$$y = y(x_i) + y'(x_i) \cdot (x - x_i).$$

Puesto que  $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$ , tenemos que

$$y = y(x_i) + f(x_i, y(x_i)) \cdot (x - x_i).$$

Aproximamos  $y(x_{i+1})$  por el valor que la recta tangente asigna a  $x_{i+1}$

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)).$$

Como desconocemos  $y(x_i)$ , salvo en  $y(0)$  ya que la condición inicial  $y(x_0)$  es un valor dado, aproximamos  $y(x_i)$  por  $y_i$ , y así sucesivamente para obtener

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad 0 \leq i \leq n - 1.$$

Gráficamente el método está descrito en la Figura 4.

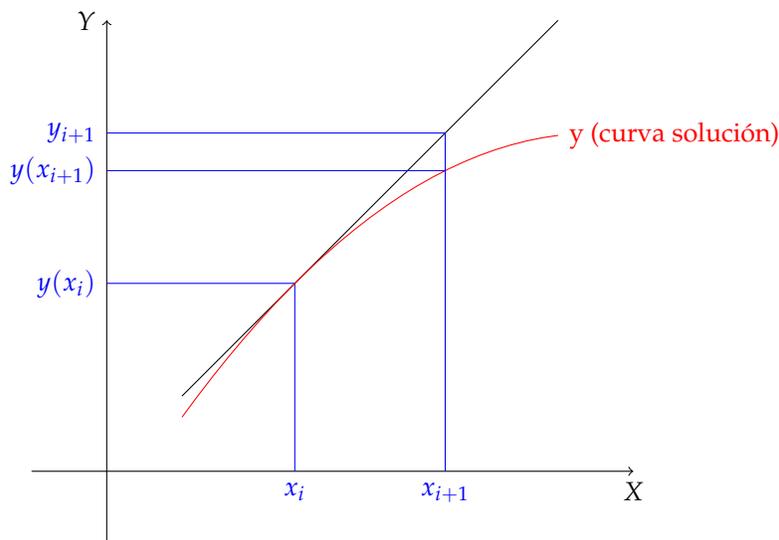


Figura 4: Explicación gráfica del método de Euler.

Dada la condición inicial  $y_0$ , los valores aproximados son  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , es decir  $y_i$  es una aproximación a  $y(x_i)$  para cada  $i$  que varía desde 1 hasta  $n$ .

Llamaremos  $e_i = y(x_i) - y_i$  al error en el  $i$ -ésimo paso. Observamos que  $e_0 = 0$ , pero en general,  $e_i \neq 0$ . Distinguiamos dos tipos de errores:

1. A causa de las fórmulas que definen el método y que se basan en algún tipo de aproximación (**errores de truncamiento**), que analizaremos en la sección 7.
2. Debido a que las computadoras hacen aritmética con un número finito de dígitos y, por tanto, cometen errores al evaluar las fórmulas que definen los métodos numéricos (**errores de redondeo**), que no analizaremos.

## 6.1. Ejemplos

A continuación resolvemos algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.** Queremos aproximar los valores de la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + \frac{1}{5}y, \\ y(0) = -3, \end{cases}$$

en el intervalo  $[0, 5]$  con  $n = 5$

*Solución.* En este caso  $h = (5 - 0)/5 = 1$  y resultan las siguientes aproximaciones

$x_{i+1} = x_i + h$	$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$
$x_1 = 1$	$y_1 = -3.6000$
$x_2 = 2$	$y_2 = -3.3200$
$x_3 = 3$	$y_3 = -1.9840$
$x_4 = 4$	$y_4 = 0.6192$
$x_5 = 5$	$y_5 = 4.7430$

La solución del problema de valor inicial es

$$y(x) = -5x + 22e^{x/5} - 25$$

que en el punto  $x = 5$  es aproximadamente 9.8022, de manera que el error es importante.  $\square$

En el siguiente ejemplo consideramos un intervalo de menor amplitud para el mismo problema de valor inicial.

**Ejemplo 2.** Queremos aproximar los valores de la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + \frac{1}{5}y, \\ y(0) = -3, \end{cases}$$

en el intervalo  $[0, 1]$  con  $n = 5$ .

*Solución.* En este caso  $h = (1 - 0)/5 = 0.2$  y resultan las siguientes aproximaciones

$x_{i+1} = x_i + h$	$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$
$x_1 = 0.2$	$y_1 = -3.12$
$x_2 = 0.4$	$y_2 = -3.2$
$x_3 = 0.6$	$y_3 = -3.248$
$x_4 = 0.8$	$y_4 = -3.257$
$x_5 = 1$	$y_5 = -3.228$

Si comparamos el resultado obtenido en este ejemplo, con el ejemplo anterior en el que se consideraba la misma ecuación diferencial pero en otro intervalo, se puede apreciar que en  $x = 1$  los resultados aproximados cambian.

La solución exacta del problema de valor inicial es

$$y(x) = -5x + 22e^{x/5} - 25$$

que en el punto  $x = 1$  es aproximadamente  $-3.12914$ , que es una aproximación aceptable.  $\square$

A continuación presentamos otro ejemplo para mostrar la mejora que produce en el resultado contemplar la idea de una  $h$  de menor tamaño.

**Ejemplo 3.** Consideremos la ecuación diferencial lineal

$$y' + 2y = 0$$

cuya solución general es  $y = c \cdot e^{-2x}$ .

Al imponer la condición inicial  $y(0) = 1$ , obtenemos la solución

$$y = e^{-2x} \tag{3}$$

*Solución.* Queremos comparar la solución aproximada con la solución exacta en el intervalo  $[0, 1]$ , eligiendo como número de puntos en la aproximación a)  $n = 10$ , b)  $n = 20$  y c)  $n = 40$ .

$x$	a) $h = 0.1$	b) $h = 0.05$	c) $h = 0.025$	Solución exacta (3)
0.0	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
0.1	0.800000000	0.821375000	0.829977007	0.800000000
0.2	0.681000000	0.707795377	0.719226253	0.640081873
0.3	0.605867800	0.633776590	0.646115227	0.512601754
0.4	0.559628676	0.562906169	0.575556391	0.411563195
0.5	0.535376972	0.562906169	0.575556391	0.332126261
0.6	0.529820120	0.557143535	0.569824171	0.270299502
0.7	0.541467455	0.568716935	0.581435423	0.222745396
0.8	0.569732776	0.596951988	0.609684903	0.186654593
0.9	0.614392311	0.641457729	0.654110862	0.159660776
1.0	0.675192037	0.701764495	0.714151626	0.139778909

Los errores absolutos con cada aproximación están recogidos en la siguiente tabla

$x$	a) $h = 0.1$	b) $h = 0.05$	c) $h = 0.025$
0.1	0.0000	0.0214	0.0299
0.2	0.0410	0.0678	0.0792
0.3	0.0932	0.1212	0.1335
0.4	0.1480	0.1513	0.1640
0.5	0.2033	0.2308	0.2435
0.6	0.2595	0.2868	0.2995
0.7	0.3188	0.3460	0.3587
0.8	0.3831	0.4103	0.4211
0.9	0.4548	0.4819	0.4945
1.0	0.5354	0.5620	0.5744

Como podemos observar, si aumentamos el valor de  $n$  obtenemos una mayor precisión, al tiempo que requiere mayor esfuerzo computacional.  $\square$

**Ejemplo 4.** Queremos aproximar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = -2y^2 + xy + x^2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

en el intervalo  $[0, 1]$ , con los siguientes valores para el número de nodos: a)  $n = 10$ , b)  $n = 20$  y c)  $n = 40$ .

*Solución.* Es posible expresar la solución del problema de valor inicial empleando funciones de tipo hipergeométrico usando Wolfram Alpha

$$\frac{2 {}_1F_1\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{3x^2}{2}\right) + x \left( - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}; \frac{3x^2}{2}\right) - 2x {}_1F_1\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{3x^2}{2}\right) + {}_1F_1\left(\frac{7}{6}; \frac{3}{2}; \frac{3x^2}{2}\right) \right)}{2 \left( {}_1F_1\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}; \frac{3x^2}{2}\right) + 2x {}_1F_1\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{3x^2}{2}\right) \right)}$$

Este ejemplo demuestra que el esfuerzo por resolver la ecuación de forma exacta no siempre compensa. Indicamos los valores que proporciona el método de Euler para los distintos valores de  $n$  y los que proporciona el método Runge-Kutta, que es otro método numérico con mayor grado de exactitud.

En la siguiente tabla representamos las aproximaciones que proporciona el método de Euler para los distintos valores de  $n$  y los que proporciona el método Runge-Kutta.

$x$	a) $h = 0.1$	b) $h = 0.05$	c) $h = 0.025$	Runge-Kutta
0.0	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
0.1	0.800000000	0.821375000	0.829977007	0.837584494
0.2	0.681000000	0.707795377	0.719226253	0.729641890
0.3	0.605867800	0.633776590	0.646115227	0.657580377
0.4	0.559628676	0.562906169	0.575556391	0.587575491
0.5	0.535376972	0.562906169	0.575556391	0.587575491
0.6	0.529820120	0.557143535	0.569824171	0.581942225
0.7	0.541467455	0.568716935	0.581435423	0.593629526
0.8	0.569732776	0.596951988	0.609684903	0.593629526
0.9	0.614392311	0.641457729	0.654110862	0.666250842
1.0	0.675192037	0.701764495	0.714151626	0.726015790

Los errores absolutos entre la solución obtenida con el método de Euler y la solución obtenida con el método de Runge-Kutta con cada aproximación están recogidos en la siguiente tabla

$x$	a) $h = 0.1$	b) $h = 0.05$	c) $h = 0.025$
0.1	0.0376	0.0162	0.0076
0.2	0.0486	0.0218	0.0104
0.3	0.0517	0.0238	0.0115
0.4	0.0523	0.0244	0.0119
0.5	0.0522	0.0247	0.0121
0.6	0.0521	0.0248	0.0121
0.7	0.0522	0.0249	0.0122
0.8	0.0522	0.0250	0.0122
0.9	0.0519	0.0248	0.0121
1.0	0.0508	0.0243	0.0119

Como podemos observar, si aumentamos el valor de  $n$  obtenemos una mayor precisión. □

## 7. Error de truncamiento en el método de Euler

Hay dos fuentes de error en el método de Euler:

1. El error cometido al aproximar la curva integral por la ecuación

$$y = y(x_i) + f(x_i, y(x_i)) \cdot (x - x_i)$$

de la recta tangente sobre el intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ .

2. El error cometido al remplazar  $y(x_i)$  por  $y_i$  en la ecuación anterior.

Para estimar el error de truncamiento emplearemos la fórmula de Taylor.

### 7.1. Fórmula de Taylor

El teorema de Taylor se puede utilizar para aproximar una función suficientemente regular por funciones polinómicas y acotar el error cometido mediante dicha estimación.

Sea  $f$  una función continuamente derivable de orden  $n + 1$  en un entorno de centro  $a$ . Entonces para todo punto  $x$  de dicho entorno se cumple:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!} (x - a)^n + R_n(x).$$

donde  $n$  es un número natural y  $R_n(x)$  el resto o término complementario, es decir lo que difiere el polinomio de Taylor de orden  $n$

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!} (x - a)^n,$$

de la función,  $f$ , que pretendemos aproximar. La fórmula de Lagrange para el resto de Taylor establece que, suponiendo que la función  $f$  es suficientemente regular,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1},$$

donde  $\alpha_x$  es un punto entre el punto  $a$  donde centramos el polinomio de Taylor y el punto  $x$  donde aproximamos. Para cada punto  $x$  donde efectuamos la aproximación el punto  $\alpha_x$  es distinto. En la fórmula de Lagrange se establece que existe dicho punto, pero no se indica cómo calcularlo, por lo que en la práctica se maximiza la derivada de orden  $n + 1$  en el intervalo  $[x, a]$  o  $[a, x]$ .

Ejemplo: Queremos aproximar  $f(x) = \text{sen}(x)$  en el punto  $a = 0$  con un polinomio de Taylor de orden 3. Puesto que

$$P_3(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x - a)^3 + R_n(x)$$

tenemos que

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{6}(x)^3 + R_n(x).$$

Para obtener el polinomio de Taylor necesitamos calcular las derivadas sucesivas de la función  $f(x) = \text{sen}(x)$  y evaluarlas en  $a = 0$ :

$f(x) = \text{sen}(x), f(0) = 0$
$f'(x) = \text{cos}(x), f'(0) = 0$
$f''(x) = -\text{sen}(x), f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\text{cos}(x), f'''(0) = -1$

De este modo,

$$P_3(x) = 1x + \frac{(-1)x^3}{6} + R_n(x),$$

y por tanto

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + R_n(x).$$

El error que se encuentra al asumir que  $y_{i+1}$  es una aproximación a  $y(x_{i+1})$  se llama **error de truncamiento local**:

$$T_i = y(x_{i+1}) - y(x_i) - h \cdot f(x_i, y(x_i)).$$

Podemos ahora emplear el teorema de Taylor para obtener una aproximación útil de este término de error:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(c_1)$$

para algún valor  $c_1$  entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$ .

Sabemos por la ecuación diferencial que

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)),$$

de modo que

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2}y''(c_1).$$

Comparando con la ecuación del error de truncamiento local

$$T_i = y(x_{i+1}) - y(x_i) - h \cdot f(x_i, y(x_i))$$

vemos que

$$T_i = \frac{h^2}{2}y''(c_i).$$

El **error total de truncamiento** para ir de  $x_0$  a  $x_n$  en  $n$  pasos del método de Euler es

$$\begin{aligned} K(c_1)h^2 + K(c_2)h^2 + \dots + K(c_n)h^2 &= -(k(c_1) + k(c_2) + \dots + K(c_n))h^2 \\ &= nkh^2 = \frac{x_n - x_0}{n}kh^2 = \bar{K}h, \end{aligned}$$

donde  $K$  es la media de los  $K(c_i)$  y  $\bar{K} = (x_n - x_0) K$ .

Por lo tanto, el error total de truncamiento al aplicar el método de Euler es proporcional al paso  $h$ , tal y como fuimos observando en los distintos ejemplos.

## 8. Método de Euler para sistemas

El método de Euler puede ser empleado en la resolución de sistemas (equivalentemente de ecuaciones de orden superior), teniendo en cuenta que con estos el método sigue sin ser preciso, a no ser que definamos un paso muy pequeño, lo que implica un enorme coste computacional.

Con el siguiente ejemplo se mostrará el proceso.

Ejemplo: Consideremos el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 0.75y = 0, \\ y(0) = 3, \\ y'(0) = -2.5. \end{cases}$$

donde consideramos una ecuación diferencial de segundo orden y dos condiciones iniciales. Resolveremos el problema con paso  $h = 0.2$  para  $x$ , en el intervalo  $[0, 1]$ , lo que implica que  $n = 5$ .

*Solución.* La solución exacta del anterior problema de valores iniciales es

$$y(x) = 2e^{-2x} (0.5e^{0.5x} + e^{1.5x}).$$

Si definimos  $y' = y_2$ , obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de orden uno:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2) = y_2, \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2) = -2y_2 - 0.75y_1 \end{cases}$$

El método de Euler se generaliza para sistemas mediante

$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i),$$

donde  $F$  es ahora  $F = (f_1, f_2)$ .

En el caso particular, tenemos por tanto las siguientes recurrencias para el cálculo de las aproximaciones:

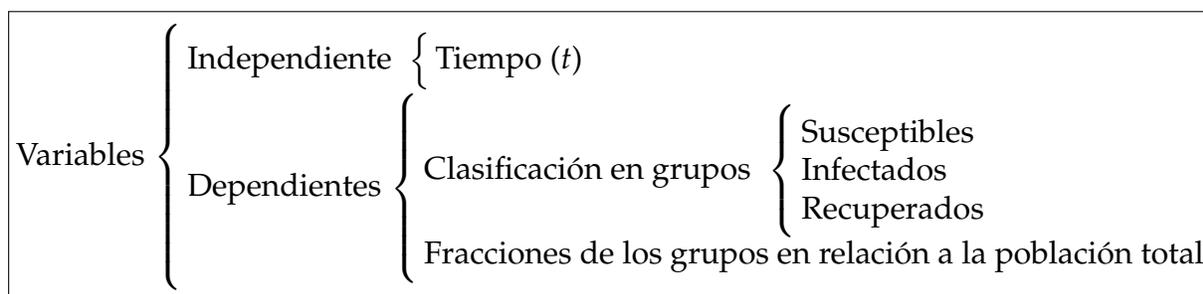
$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + 0.2y_{2,i}, y_{2,i+1} = y_{2,i} + 0.2(-2y_{2,i} - 0.75y_{1,i}).$$

$i$	$x_i$	$y_{1,i}$	$y_1$ Exacta	Error $\epsilon_1 = y_1 - y_{1,i}$	$y_{2,i}$	$y_2$ Exacta	$\epsilon_2 = y_2 - y_{2,i}$
0	0.0	3.00000	3.00000	0.00000	-2.50000	-2.50000	0.00000
1	0.2	2.50000	2.55049	0.05049	-1.95000	-2.01606	-0.06606
2	0.4	2.11000	2.18627	0.76270	-1.54500	-1.64195	-0.09695
3	0.6	1.80100	1.88821	0.08721	-1.24350	-1.35067	-0.10717
4	0.8	1.55230	1.64183	0.08953	-1.01625	-1.12211	-0.10586
5	1.0	1.34905	1.43619	0.08714	-0.84260	-0.94123	-0.09863

□

## 9. Método SIR

En el proceso de creación del modelo SIR identificamos dos tipos de variables: dependiente e independiente. Los conjuntos de las variables dependientes son proporcionales entre sí, por lo que cualquiera de ellos nos darán la misma información sobre el progreso de la epidemia; la variable independiente es el tiempo ( $t$ ), usualmente medido en días.



El primer conjunto de variables dependientes cuenta los individuos de cada uno de los grupos, en función del tiempo:

$$S = S(t) \longrightarrow \text{n}^\circ \text{ de individuos } \textit{susceptibles};$$

$$I = I(t) \longrightarrow \text{n}^\circ \text{ de individuos } \textit{infectados};$$

$$R = R(t) \longrightarrow \text{n}^\circ \text{ de individuos } \textit{recuperados}.$$

El segundo conjunto de variables dependientes representa la **fracción** de la población total en cada una de las tres categorías. Por lo que si  $N$  es la población total, que consideramos constante durante el tiempo de análisis, tenemos:

$$s(t) = S(t)/N \longrightarrow \text{fracción de la población susceptible};$$

$$i(t) = I(t)/N \longrightarrow \text{fracción de la población infectada};$$

$$r(t) = R(t)/N \longrightarrow \text{fracción de la población recuperada}.$$

Realizamos algunas suposiciones sobre la tasa de cambio de nuestras variables dependientes:

- Consideramos que la población total es constante, por lo que ignoramos nacimientos, defunciones y procesos migratorios.
- $b$  → número fijo de contactos por cada individuo contagiado, que ayudan a la propagación de la enfermedad. No todos los contactos son individuos susceptibles, por lo que asumimos que el promedio que genera nueva población infectada es de  $b s(t)$ .
- $k$  → fracción fija del grupo de infectados que se recuperará durante un día determinado.

Asumiendo los puntos anteriores, podemos establecer tres ecuaciones diferenciales:

De este modo, el modelo SIR se puede establecer como un conjunto de tres ecuaciones diferenciales no lineales, con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -b s(t)i(t), \\ \frac{dr}{dt} = k i(t), \\ \frac{di}{dt} = b s(t) i(t) - k i(t). \end{cases}$$

Para su resolución necesitamos, por un lado, las condiciones iniciales de las tres poblaciones (personas susceptibles, infectadas y recuperadas). Además, pese a ser el modelo matemático compartimental más simple no existe solución analítica para el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, de modo que normalmente se resuelve numéricamente utilizando algún método para ecuaciones diferenciales (Euler, Runge-Kutta, ...).

**Ejemplo 5.** *Tenemos un nuevo virus en la ciudad al que nadie es inmune al principio de la epidemia. Así, consideramos que la población es susceptible de ser infectada. Asumiremos que hay 10 persona infectadas de una población de 7 900 000. Por eso, nuestros valores iniciales para las variables de población son*

$$S(0) = 7\,899\,990$$

$$I(0) = 10$$

$$R(0) = 0$$

*Si fraccionamos la cantidad de cada grupo por el total de la población, obtendremos las siguientes condiciones iniciales*

$$s(0) = 0.99999873$$

$$i(0) = 1.27 \cdot 10^{-6}$$

$$r(0) = 0$$

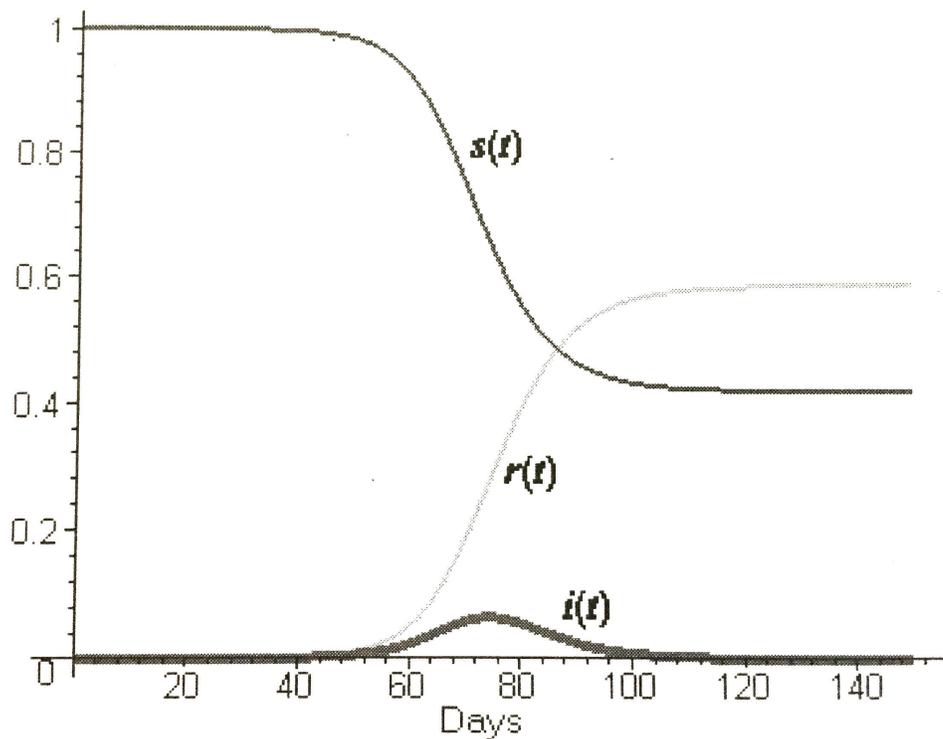
Nuestro modelo completo es

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -b s(t)i(t), & s(0) = 1 - 1,27 \cdot 10^{-6}, \\ \frac{di}{dt} = b s(t) i(t) - k i(t), & i(0) = 1,27 \cdot 10^{-6}, \\ \frac{dr}{dt} = k i(t), & r(0) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Desconocemos los valores de los parámetros  $b$  y  $k$ , pero podemos estimarlos y ajustarlos para aproximar el número de infectados y recuperados.

Si el periodo medio de infección es de tres días y cada infectado contagiará a una persona cada dos días, entonces  $b = \frac{1}{2}$ .

La siguiente gráfica muestra las curvas solución para estas elecciones de  $b$  y  $k$ .



El método habitual para estimar  $b$  y  $k$  es la observación de la evolución de la enfermedad durante un período de tiempo y determinar los valores que minimicen las distancias entre las curvas teóricas y los datos reales.

## 10. Caso práctico

Tenemos el número de infectados diarios durante un período de 65 días (tabla A del anexo). Mediante el modelo descrito en el apartado anterior, buscamos los valores de los parámetros  $k$  y  $b$  que permitan aproximar lo más posible al número de infectados.

Valores iniciales de la población

Población inicial: 6 500 habitantes

Contagiados: 6 habitantes

$$S(0) = 6\,500 - 6 = 6\,494$$

$$I(0) = 6$$

$$R(0) = 0$$

Condiciones iniciales

$$s(0) = 0.99908$$

$$i(0) = 0.00092$$

$$r(0) = 0$$

El modelo completo es

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -b s(t)i(t), & s(0) = 0.9997, \\ \frac{di}{dt} = b s(t)i(t) - k i(t), & i(0) = 0.0003 \cdot 10^{-6}, \\ \frac{dr}{dt} = k i(t), & r(0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

En nuestro caso:

$$(s_{j+1}, i_{j+1}, r_{j+1}) = (s_j, i_j, r_j) + h \cdot (b \cdot s(t) \cdot i(t), b \cdot s(t) \cdot i(t) - k \cdot i(t), k \cdot i(t))$$

Lo que nos lleva a

$$\begin{cases} s_{j+1} = s_j + h \cdot b \cdot s(t) \cdot i(t) \\ i_{j+1} = i_j + h \cdot (b \cdot s(t) \cdot i(t) - k \cdot i(t)) \\ r_{j+1} = r_j + k \cdot i(t) \end{cases} \quad (6)$$

## 11. Resultados y conclusiones

Después del estudio teórico realizado procedemos a presentar distintas simulaciones del modelo SIR comparado con los datos reales de la primera ola de COVID en Galicia. Realizamos distintos experimentos con diferentes valores de los parámetros  $b$  y  $k$ . La dificultad real no es el ajuste a día de hoy, sino en condiciones similares haber tenido los valores de  $b$  y  $k$  que mejor ajustaban la ola para poder asesorar en la toma de decisiones.

### 11.1. Primera aproximación (tabla B)

Para  $k = 0.3$  y  $b = 0.5$  obtenemos los siguientes resultados, que son poco satisfactorios:



### 11.2. Segunda aproximación (tabla C)

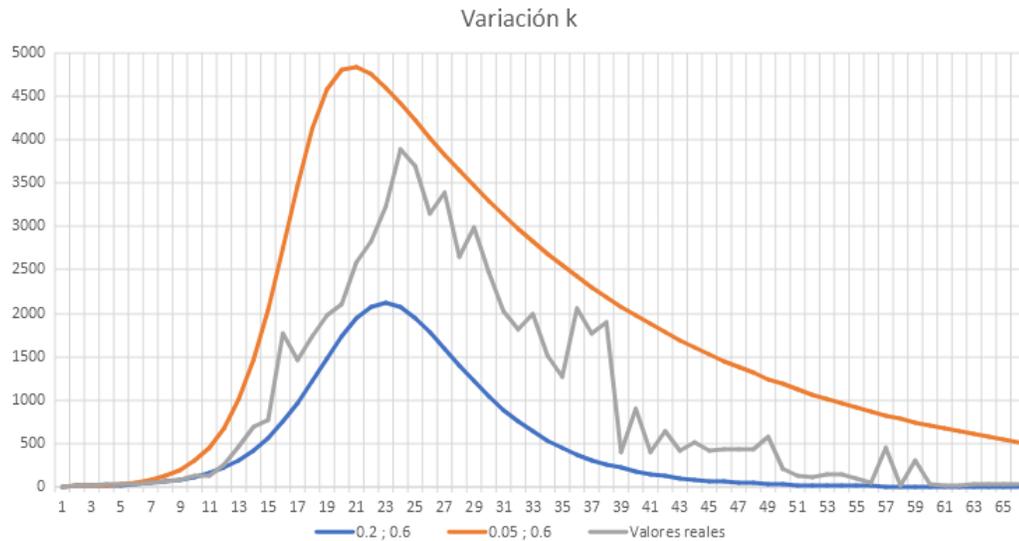
Elegimos  $k = 0.1$  y  $b = 0.6$  y obtenemos los siguientes resultados, que son más aceptables:



### 11.3. Variación del parámetro $k$ (tabla D)

Nos preguntamos qué efectos tiene sobre la curva de aproximación mantener  $b = 0.6$  fijo, y variar  $k$ .

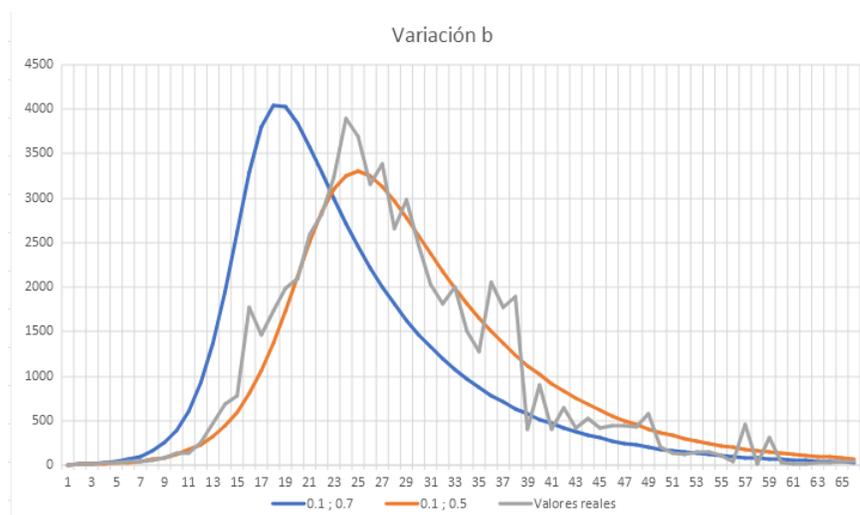
1. si  $k = 0.2$  disminuye el máximo número de infectados y se desplaza a la derecha (es decir, lo alcanza unos días más tarde)
2. si  $k = 0.05$  aumenta el máximo número de infectados



#### 11.4. Variación del parámetro $b$ (tabla E)

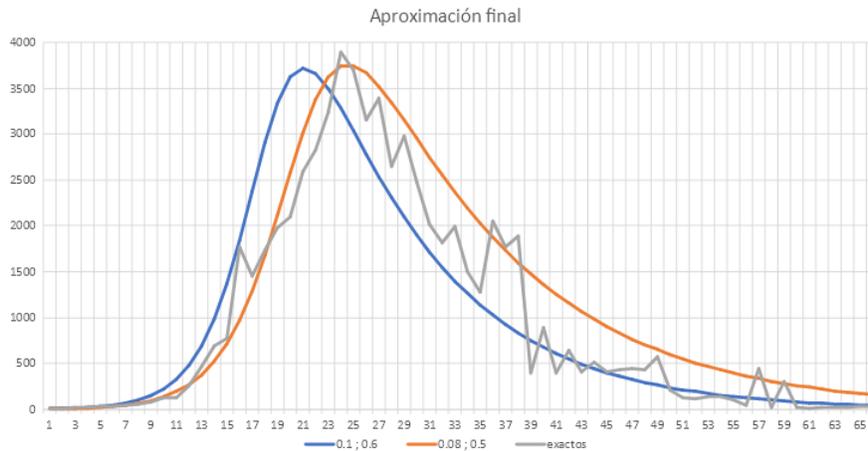
Nos preguntamos qué efectos tiene sobre la curva de aproximación mantener  $k = 0.1$  fijo, y variar  $b$ .

1. si  $b = 0.7$  aumenta el máximo número de infectados y se desplaza hacia la izquierda (lo alcanza unos días antes)
2. si  $b = 0.5$  disminuye el máximo número de infectados y se desplaza hacia la derecha (se alcanza unos días más tarde)



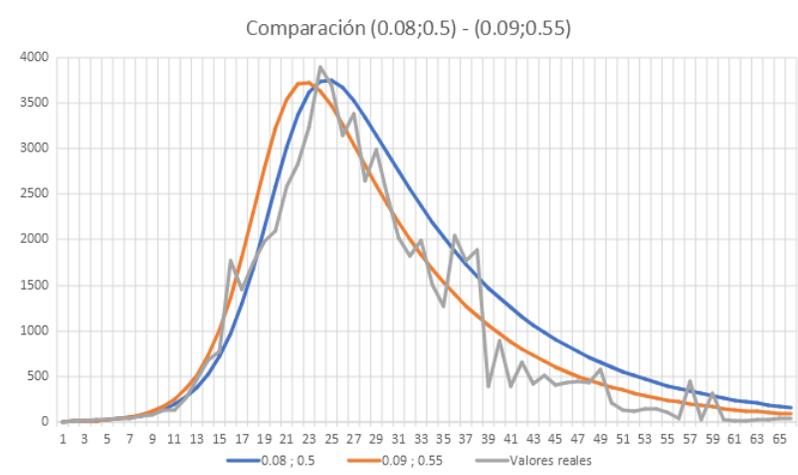
### 11.5. Tercera aproximación (tabla F)

Elegimos  $k = 0.08$  y  $b = 0.5$  y observamos que se ajusta todavía mejor, aunque a partir del día 35 no disminuye al ritmo deseado:



### 11.6. Cuarta aproximación (tabla G)

Elegimos  $k = 0.09$  y  $b = 0.55$  para intentar solucionar la pequeña desviación que observábamos en la tercera aproximación a partir del máximo. Para ello, aumentamos un poco cada uno de los valores  $k$  y  $b$  y observamos su comportamiento, que resulta ser el deseado pero con otro inconveniente, el desplazamiento del máximo a la izquierda.



## 12. Propuesta de continuidad

El estudio presentado nos ha permitido profundizar en el concepto de derivada y sus distintas aplicaciones. Además, hemos necesitado herramientas como las ecuaciones diferenciales para poder abordar la comprensión del modelo SIR, un modelo compartimental que nos permite explicar la evolución de una enfermedad en una sociedad completamente susceptible.

Una crítica al modelo, teniendo en cuenta lo que hemos vivido durante estos dos últimos años, es que considera los valores de los parámetros  $b$  y  $k$  constantes durante todo el tiempo. Pero durante este tiempo hemos vivido distintas situaciones, que variaron desde el total confinamiento, poder estar sin máscaras, el uso de máscaras en exteriores e interiores, el uso de máscaras solo en interiores, sin dejar de mencionar la vacunación de casi el noventa por ciento de la población (que se fue haciendo por distintos grupos de edad). Esto nos hace pensar que es necesario poder permitir que los parámetros  $b$  y  $k$  puedan variar para un mejor ajuste en los distintos momentos de la pandemia.

## Bibliografía

- [1] Fred Brauer y Carlos Castillo-Chavez. *Mathematical models in population biology and epidemiology*. Vol. 2. Springer, 2012.
- [2] Yutaka Okabe y Akira Shudo. "A mathematical model of epidemics—A tutorial for students". En: *Mathematics* 8.7 (2020), pág. 1174.
- [3] DRJ Owen. *Advanced engineering mathematics*. 1973.
- [4] Gilbert Strang, Edwin Herman y col. *Calculus Volume 1*. Vol. 3. OpenStax Houston, Texas, 2016.
- [5] William F Trench. "Elementary differential equations with boundary value problems". En: (2013).
- [6] Howard Howie Weiss. "The SIR model and the foundations of public health". En: *Materials mathematics* (2013), págs. 0001-17.

## A. Infectados por día

Día	Infectados	Día	Infectados	Día	Infectados
0	6	23	3892	45	439
1	12	24	3697	46	441
2	19	25	3151	47	435
3	25	26	3387	48	579
4	31	27	2653	49	206
5	38	28	2984	50	130
6	44	29	2473	51	120
7	60	30	2022	52	143
8	80	31	1820	53	146
9	131	32	1998	54	102
10	131	33	1506	55	43
11	259	34	1278	56	450
12	467	3	2051	57	20
13	688	36	1772	58	310
14	776	37	1891	59	26
15	1776	38	399	60	11
16	1460	39	894	61	18
17	1739	40	397	62	27
18	1984	41	650	63	29
19	2101	42	415	64	39
20	2590	43	518	65	39
21	2827	44	412		
22	3233				

## B. Primera aproximación ( $k = 0.3, b = 0.5$ )

$x_j$	$s_j$	$i_j$	$r_j$	I(t)	Exacto
0	0,99908	0,00092	0	6	6
1	0,99862	0,001104	0,000276	7,173249	12
2	0,998069	0,001324	0,000607	8,602951	19
3	0,997409	0,001587	0,001004	10,315237	25
4	0,996617	0,001902	0,00148	12,36492	31
5	0,99567	0,00228	0,002051	14,816992	38
6	0,994535	0,002731	0,002735	17,748308	44
7	0,993177	0,003269	0,003554	21,24947	60

$x_j$	$s_j$	$i_j$	$r_j$	I(t)	Exacto
8	0,991554	0,003912	0,004535	25,426871	80
9	0,989614	0,004678	0,005708	30,404861	131
10	0,9873	0,005589	0,007112	36,327943	131
11	0,984541	0,006671	0,008788	43,362841	259
12	0,981257	0,007954	0,01079	51,700228	467
13	0,977354	0,00947	0,013176	61,555753	688
14	0,972726	0,011257	0,016017	73,169913	776
15	0,967251	0,013355	0,019394	86,80609	1776
16	0,960793	0,015807	0,0234	102,745919	1460
17	0,953199	0,018659	0,028142	121,280907	1739
18	0,944306	0,021954	0,03374	142,699055	1984
19	0,933941	0,025733	0,040326	167,26515	2101
20	0,921924	0,03003	0,048046	195,193481	2590
21	0,908082	0,034863	0,057055	226,612237	2827
22	0,892252	0,040234	0,067514	261,519773	3233
23	0,874303	0,046113	0,079584	299,734642	3892
24	0,854145	0,052437	0,093418	340,84368	3697
25	0,83175	0,059101	0,109149	384,155454	3151
26	0,807171	0,065949	0,12688	428,669449	3387
27	0,780555	0,072781	0,146664	473,073464	2653
28	0,752151	0,079351	0,168498	515,781405	2984
29	0,722309	0,085388	0,192304	555,019632	2473
30	0,691471	0,090609	0,21792	588,961486	2022
31	0,660144	0,094754	0,245103	615,8978	1820
32	0,628868	0,097603	0,273529	634,418974	1998
33	0,598179	0,099012	0,30281	643,57624	1506
34	0,568565	0,098922	0,332513	642,990106	1278
35	0,540443	0,097367	0,36219	632,883963	2051
36	0,514133	0,094467	0,3914	614,037783	1772
37	0,489848	0,090412	0,41974	587,674953	1891
38	0,467705	0,085432	0,446863	555,308311	399
39	0,447726	0,079781	0,472493	518,57592	894
40	0,429866	0,073707	0,496427	479,093114	397
41	0,414024	0,067437	0,518539	438,33811	650
42	0,400064	0,061166	0,53877	397,577937	415
43	0,387829	0,055051	0,55712	357,832837	518
44	0,377154	0,049211	0,573635	319,871915	412
45	0,367873	0,043728	0,588399	284,230749	439
46	0,35983	0,038653	0,601517	251,241998	441
47	0,352876	0,034011	0,613113	221,071641	435
48	0,346875	0,029809	0,623316	193,755599	579
49	0,341705	0,026036	0,632259	169,233433	206

$x_j$	$s_j$	$i_j$	$r_j$	I(t)	Exacto
50	0,337257	0,022673	0,64007	147,377388	130
51	0,333434	0,019695	0,646872	128,016203	120
52	0,33015	0,01707	0,65278	110,953797	143
53	0,327332	0,014767	0,657901	95,983367	146
54	0,324916	0,012753	0,662331	82,89759	102
55	0,322844	0,010999	0,666157	71,495673	43
56	0,321068	0,009475	0,669457	61,587934	450
57	0,319547	0,008154	0,672299	52,998516	20
58	0,318244	0,00701	0,674745	45,566722	310
59	0,317129	0,006023	0,676848	39,147382	26
60	0,316174	0,005171	0,678655	33,61055	11
61	0,315356	0,004437	0,680207	28,840774	18
62	0,314657	0,003806	0,681538	24,736103	27
63	0,314058	0,003263	0,682679	21,206964	29
64	0,313546	0,002796	0,683658	18,174984	39
65	0,313107	0,002396	0,684497	15,571834	39

### C. Segunda aproximación ( $k = 0.1, b = 0.6$ )

$x_j$	$s_j$	$i_j$	$r_j$	I(t)	Exacto
0	0,99908	0,00092	0	6	6
1	0,998529	0,001379	0,000092	8,966699	12
2	0,997702	0,002068	0,00023	13,442132	19
3	0,996464	0,003099	0,000437	20,144664	25
4	0,994611	0,004642	0,000747	30,174258	31
5	0,991841	0,006948	0,001211	45,163824	38
6	0,987706	0,010388	0,001906	67,524637	44
7	0,981549	0,015506	0,002945	100,788861	60
8	0,972418	0,023087	0,004495	150,067527	80
9	0,958947	0,034249	0,006804	222,617751	131
10	0,939242	0,05053	0,010229	328,443181	131
11	0,910766	0,073953	0,015282	480,691343	259
12	0,870354	0,106969	0,022677	695,300532	467
13	0,814493	0,152133	0,033374	988,864909	688
14	0,740146	0,211267	0,048587	1373,232551	776
15	0,646325	0,283961	0,069714	1845,745023	1776
16	0,536207	0,365683	0,09811	2376,941585	1460
17	0,418558	0,446764	0,134678	2903,966645	1739

$x_j$	$s_j$	$i_j$	$r_j$	$I(t)$	Exacto
18	0,30636	0,514286	0,179355	3342,856368	1984
19	0,211826	0,557391	0,230783	3623,040607	2101
20	0,140984	0,572494	0,286522	3721,20878	2590
21	0,092557	0,563672	0,343772	3663,86641	2827
22	0,061254	0,538607	0,400139	3500,948611	3233
23	0,041459	0,504542	0,454	3279,521225	3892
24	0,028908	0,466638	0,504454	3033,147774	3697
25	0,020814	0,428068	0,551118	2782,442454	3151
26	0,015468	0,390607	0,593924	2538,946965	3387
27	0,011843	0,355172	0,632985	2308,616243	2653
28	0,009319	0,322178	0,668502	2094,159339	2984
29	0,007518	0,291762	0,70072	1896,453075	2473
30	0,006202	0,263902	0,729896	1715,362084	2022
31	0,00522	0,238494	0,756287	1550,208847	1820
32	0,004473	0,215391	0,780136	1400,043008	1998
33	0,003895	0,19443	0,801675	1263,796014	1506
34	0,00344	0,175442	0,821118	1140,369751	1278
35	0,003078	0,15826	0,838662	1028,6868	2051
36	0,002786	0,142726	0,854488	927,718073	1772
37	0,002547	0,128692	0,868761	836,497029	1891
38	0,002351	0,116019	0,88163	754,125863	399
39	0,002187	0,104581	0,893232	679,776913	894
40	0,00205	0,09426	0,90369	612,691252	397
41	0,001934	0,08495	0,913116	552,175676	650
42	0,001835	0,076554	0,921611	497,598821	415
43	0,001751	0,068983	0,929266	448,386894	518
44	0,001679	0,062157	0,936165	404,019288	412
45	0,001616	0,056004	0,94238	364,02426	439
46	0,001562	0,050458	0,947981	327,974782	441
47	0,001514	0,045459	0,953026	295,484614	435
48	0,001473	0,040955	0,957572	266,204638	579
49	0,001437	0,036895	0,961668	239,819457	206
50	0,001405	0,033238	0,965357	216,044266	130
51	0,001377	0,029942	0,968681	194,621973	120
52	0,001352	0,026972	0,971675	175,320578	143
53	0,00133	0,024297	0,974373	157,930772	146
54	0,001311	0,021887	0,976802	142,263764	102
55	0,001294	0,019715	0,978991	128,149295	43
56	0,001279	0,017759	0,980962	115,433846	450
57	0,001265	0,015997	0,982738	103,979011	20
58	0,001253	0,014409	0,984338	93,660022	310
59	0,001242	0,012979	0,985779	84,364419	26

$x_j$	$s_j$	$i_j$	$r_j$	$I(t)$	Exacto
60	0,001232	0,011691	0,987077	75,990841	11
61	0,001224	0,01053	0,988246	68,44794	18
62	0,001216	0,009485	0,989299	61,653398	27
63	0,001209	0,008544	0,990248	55,533036	29
64	0,001203	0,007695	0,991102	50,020014	39
65	0,001197	0,006931	0,991871	45,054109	39

#### D. Variación de $k$ ( $b = 0.6$ )

xj	k=0.2			k=0.05			Infectados		
	$s_j$	$i_j$	$r_j$	$s_j$	$i_j$	$r_j$	k=0.2	k=0.05	reales
0	1	0	0	1	0	0	6	6	6
1	1	0	0	1	0	0	8	9	12
2	1	0	0	1	0	0	12	14	19
3	1	0	0	1	0	0	16	22	25
4	1	0	0	0,99	0,01	0	23	34	31
5	0,99	0	0	0,99	0,01	0	32	53	38
6	0,99	0,01	0	0,99	0,01	0	45	82	44
7	0,99	0,01	0	0,98	0,02	0	62	127	60
8	0,98	0,01	0,01	0,97	0,03	0	87	195	80
9	0,97	0,02	0,01	0,95	0,05	0	120	298	131
10	0,96	0,03	0,01	0,92	0,07	0,01	166	453	131
11	0,95	0,04	0,02	0,89	0,1	0,01	229	682	259
12	0,93	0,05	0,02	0,83	0,16	0,02	313	1010	467
13	0,9	0,07	0,03	0,75	0,22	0,02	425	1462	688
14	0,86	0,09	0,05	0,65	0,32	0,03	570	2048	776
15	0,82	0,12	0,07	0,53	0,42	0,05	751	2745	1776
16	0,76	0,15	0,09	0,39	0,53	0,07	970	3477	1460
17	0,69	0,19	0,12	0,27	0,63	0,1	1220	4125	1739
18	0,62	0,23	0,16	0,17	0,7	0,13	1485	4581	1984
19	0,53	0,27	0,2	0,1	0,74	0,16	1736	4807	2101
20	0,45	0,3	0,25	0,05	0,75	0,2	1943	4843	2590
21	0,37	0,32	0,31	0,03	0,73	0,24	2075	4755	2827
22	0,3	0,33	0,38	0,02	0,71	0,28	2116	4601	3233
23	0,24	0,32	0,44	0,01	0,68	0,31	2069	4417	3892
24	0,19	0,3	0,51	0,01	0,65	0,34	1951	4221	3697
25	0,16	0,27	0,57	0	0,62	0,38	1786	4024	3151
26	0,13	0,25	0,62	0	0,59	0,41	1598	3831	3387
27	0,11	0,22	0,67	0	0,56	0,44	1405	3645	2653
28	0,1	0,19	0,71	0	0,53	0,47	1219	3466	2984

xj	k=0.2			k=0.05			Infectados		
	sj	ij	rj	sj	ij	rj	k=0.2	k=0.05	reales
29	0,09	0,16	0,75	0	0,51	0,49	1047	3294	2473
30	0,08	0,14	0,78	0	0,48	0,52	892	3131	2022
31	0,07	0,12	0,81	0	0,46	0,54	756	2975	1820
32	0,07	0,1	0,83	0	0,43	0,56	637	2827	1998
33	0,06	0,08	0,85	0	0,41	0,59	536	2686	1506
34	0,06	0,07	0,87	0	0,39	0,61	449	2552	1278
35	0,06	0,06	0,88	0	0,37	0,63	375	2424	2051
36	0,06	0,05	0,9	0	0,35	0,65	313	2303	1772
37	0,05	0,04	0,91	0	0,34	0,66	261	2188	1891
38	0,05	0,03	0,91	0	0,32	0,68	217	2079	399
39	0,05	0,03	0,92	0	0,3	0,7	181	1975	894
40	0,05	0,02	0,93	0	0,29	0,71	150	1876	397
41	0,05	0,02	0,93	0	0,27	0,73	125	1783	650
42	0,05	0,02	0,93	0	0,26	0,74	103	1693	415
43	0,05	0,01	0,94	0	0,25	0,75	86	1609	518
44	0,05	0,01	0,94	0	0,24	0,76	71	1528	412
45	0,05	0,01	0,94	0	0,22	0,78	59	1452	439
46	0,05	0,01	0,94	0	0,21	0,79	49	1379	441
47	0,05	0,01	0,95	0	0,2	0,8	41	1310	435
48	0,05	0,01	0,95	0	0,19	0,81	34	1245	579
49	0,05	0	0,95	0	0,18	0,82	28	1183	206
50	0,05	0	0,95	0	0,17	0,83	23	1124	130
51	0,05	0	0,95	0	0,16	0,84	19	1067	120
52	0,05	0	0,95	0	0,16	0,84	16	1014	143
53	0,05	0	0,95	0	0,15	0,85	13	963	146
54	0,05	0	0,95	0	0,14	0,86	11	915	102
55	0,05	0	0,95	0	0,13	0,87	9	869	43
56	0,05	0	0,95	0	0,13	0,87	7	826	450
57	0,05	0	0,95	0	0,12	0,88	6	785	20
58	0,05	0	0,95	0	0,11	0,89	5	745	310
59	0,05	0	0,95	0	0,11	0,89	4	708	26
60	0,05	0	0,95	0	0,1	0,9	3	673	11
61	0,05	0	0,95	0	0,1	0,9	3	639	18
62	0,05	0	0,95	0	0,09	0,91	2	607	27
63	0,05	0	0,95	0	0,09	0,91	2	577	29
64	0,05	0	0,95	0	0,08	0,92	2	548	39
65	0,05	0	0,95	0	0,08	0,92	1	521	39

## E. Variación de $b$ ( $k = 0.1$ )

xj	b=0.7			b=0.5			Infectados		
	sj	ij	rj	sj	ij	rj	b=0.7	b=0.5	reales
0	1	0	0	1	0	0	6	6	6
1	1	0	0	1	0	0	10	8	12
2	1	0	0	1	0	0	15	12	19
3	1	0	0	1	0	0	24	16	25
4	0,99	0,01	0	1	0	0	39	23	31
5	0,99	0,01	0	0,99	0	0	62	32	38
6	0,98	0,02	0	0,99	0,01	0	99	45	44
7	0,97	0,02	0	0,99	0,01	0	157	62	60
8	0,96	0,04	0,01	0,98	0,01	0	249	87	80
9	0,93	0,06	0,01	0,98	0,02	0	390	121	131
10	0,89	0,09	0,02	0,97	0,03	0,01	605	168	131
11	0,83	0,14	0,03	0,96	0,04	0,01	922	233	259
12	0,75	0,21	0,04	0,94	0,05	0,01	1367	321	467
13	0,64	0,3	0,06	0,91	0,07	0,02	1948	439	688
14	0,51	0,4	0,09	0,88	0,09	0,02	2626	596	776
15	0,36	0,51	0,13	0,84	0,12	0,03	3292	800	1776
16	0,23	0,58	0,18	0,79	0,16	0,05	3798	1058	1460
17	0,14	0,62	0,24	0,73	0,21	0,06	4040	1370	1739
18	0,08	0,62	0,3	0,65	0,27	0,08	4027	1732	1984
19	0,04	0,59	0,36	0,56	0,33	0,11	3845	2122	2101
20	0,03	0,55	0,42	0,47	0,39	0,14	3579	2508	2590
21	0,02	0,51	0,48	0,38	0,44	0,18	3286	2849	2827
22	0,01	0,46	0,53	0,3	0,48	0,22	2994	3106	3233
23	0,01	0,42	0,58	0,23	0,5	0,27	2716	3257	3892
24	0	0,38	0,62	0,17	0,51	0,32	2458	3300	3697
25	0	0,34	0,65	0,13	0,5	0,37	2221	3250	3151
26	0	0,31	0,69	0,09	0,48	0,42	2004	3131	3387
27	0	0,28	0,72	0,07	0,46	0,47	1808	2966	2653
28	0	0,25	0,75	0,06	0,43	0,52	1630	2777	2984
29	0	0,23	0,77	0,04	0,4	0,56	1469	2576	2473
30	0	0,2	0,8	0,04	0,37	0,6	1323	2375	2022
31	0	0,18	0,82	0,03	0,34	0,64	1192	2179	1820
32	0	0,17	0,83	0,02	0,31	0,67	1074	1992	1998
33	0	0,15	0,85	0,02	0,28	0,7	967	1817	1506
34	0	0,13	0,87	0,02	0,25	0,73	871	1654	1278
35	0	0,12	0,88	0,02	0,23	0,75	784	1503	2051
36	0	0,11	0,89	0,01	0,21	0,78	706	1364	1772
37	0	0,1	0,9	0,01	0,19	0,8	636	1236	1891

xj	b=0.7			b=0.5			Infectados		
	sj	ij	rj	sj	ij	rj	b=0.7	b=0.5	reales
38	0	0,09	0,91	0,01	0,17	0,82	573	1120	399
39	0	0,08	0,92	0,01	0,16	0,83	515	1014	894
40	0	0,07	0,93	0,01	0,14	0,85	464	918	397
41	0	0,06	0,94	0,01	0,13	0,86	418	830	650
42	0	0,06	0,94	0,01	0,12	0,88	376	751	415
43	0	0,05	0,95	0,01	0,1	0,89	339	679	518
44	0	0,05	0,95	0,01	0,09	0,9	305	613	412
45	0	0,04	0,96	0,01	0,09	0,91	274	554	439
46	0	0,04	0,96	0,01	0,08	0,92	247	501	441
47	0	0,03	0,97	0,01	0,07	0,92	222	452	435
48	0	0,03	0,97	0,01	0,06	0,93	200	408	579
49	0	0,03	0,97	0,01	0,06	0,94	180	369	206
50	0	0,02	0,97	0,01	0,05	0,94	162	333	130
51	0	0,02	0,98	0,01	0,05	0,95	146	301	120
52	0	0,02	0,98	0,01	0,04	0,95	132	271	143
53	0	0,02	0,98	0,01	0,04	0,96	118	245	146
54	0	0,02	0,98	0,01	0,03	0,96	107	221	102
55	0	0,01	0,98	0,01	0,03	0,96	96	200	43
56	0	0,01	0,99	0,01	0,03	0,97	86	180	450
57	0	0,01	0,99	0	0,03	0,97	78	163	20
58	0	0,01	0,99	0	0,02	0,97	70	147	310
59	0	0,01	0,99	0	0,02	0,97	63	132	26
60	0	0,01	0,99	0	0,02	0,98	57	120	11
61	0	0,01	0,99	0	0,02	0,98	51	108	18
62	0	0,01	0,99	0	0,01	0,98	46	97	27
63	0	0,01	0,99	0	0,01	0,98	41	88	29
64	0	0,01	0,99	0	0,01	0,98	37	79	39
65	0	0,01	0,99	0	0,01	0,98	34	71	39

### F. Tercera aproximación ( $k = 0.08, b = 0.5$ )

xj	k=0.1, b=0.6 (ap. 1)			k= 0.08, b=0.5 (ap. 2)			Infectados		
	sj	ij	rj	sj	ij	rj	ap.1	ap. 2	reales
0	1	0	0	1	0	0	6	6	6
1	1	0	0	1	0	0	9	8	12
2	1	0	0	1	0	0	13	12	19
3	1	0	0	1	0	0	20	17	25
4	0,99	0	0	1	0	0	30	24	31
5	0,99	0,01	0	0,99	0,01	0	45	34	38

xj	k=0.1, b=0.6 (ap. 1)			k= 0.08, b=0.5 (ap. 2)			Infectados		
	sj	ij	rj	sj	ij	rj	ap.1	ap. 2	reales
6	0,99	0,01	0	0,99	0,01	0	68	49	44
7	0,98	0,02	0	0,99	0,01	0	101	69	60
8	0,97	0,02	0	0,98	0,02	0	150	98	80
9	0,96	0,03	0,01	0,97	0,02	0	223	138	131
10	0,94	0,05	0,01	0,96	0,03	0,01	328	194	131
11	0,91	0,07	0,02	0,95	0,04	0,01	481	272	259
12	0,87	0,11	0,02	0,93	0,06	0,01	695	379	467
13	0,81	0,15	0,03	0,9	0,08	0,02	989	525	688
14	0,74	0,21	0,05	0,87	0,11	0,02	1373	720	776
15	0,65	0,28	0,07	0,82	0,15	0,03	1846	974	1776
16	0,54	0,37	0,1	0,76	0,2	0,04	2377	1295	1460
17	0,42	0,45	0,13	0,68	0,26	0,06	2904	1682	1739
18	0,31	0,51	0,18	0,59	0,33	0,08	3343	2121	1984
19	0,21	0,56	0,23	0,5	0,4	0,11	3623	2581	2101
20	0,14	0,57	0,29	0,4	0,46	0,14	3721	3016	2590
21	0,09	0,56	0,34	0,31	0,52	0,17	3664	3375	2827
22	0,06	0,54	0,4	0,23	0,56	0,22	3501	3621	3233
23	0,04	0,5	0,45	0,16	0,58	0,26	3280	3741	3892
24	0,03	0,47	0,5	0,12	0,58	0,31	3033	3748	3697
25	0,02	0,43	0,55	0,08	0,56	0,35	2782	3666	3151
26	0,02	0,39	0,59	0,06	0,54	0,4	2539	3524	3387
27	0,01	0,36	0,63	0,04	0,51	0,44	2309	3347	2653
28	0,01	0,32	0,67	0,03	0,48	0,48	2094	3152	2984
29	0,01	0,29	0,7	0,02	0,45	0,52	1896	2950	2473
30	0,01	0,26	0,73	0,02	0,42	0,56	1715	2750	2022
31	0,01	0,24	0,76	0,01	0,39	0,59	1550	2556	1820
32	0	0,22	0,78	0,01	0,36	0,62	1400	2371	1998
33	0	0,19	0,8	0,01	0,34	0,65	1264	2195	1506
34	0	0,18	0,82	0,01	0,31	0,68	1140	2030	1278
3	0	0,16	0,84	0,01	0,29	0,7	1029	1876	2051
36	0	0,14	0,85	0,01	0,27	0,73	928	1732	1772
37	0	0,13	0,87	0,01	0,25	0,75	836	1599	1891
38	0	0,12	0,88	0	0,23	0,77	754	1475	399
39	0	0,1	0,89	0	0,21	0,79	680	1360	894
40	0	0,09	0,9	0	0,19	0,8	613	1254	397
41	0	0,08	0,91	0	0,18	0,82	552	1156	650
42	0	0,08	0,92	0	0,16	0,83	498	1065	415
43	0	0,07	0,93	0	0,15	0,85	448	982	518
44	0	0,06	0,94	0	0,14	0,86	404	905	412
45	0	0,06	0,94	0	0,13	0,87	364	833	439
46	0	0,05	0,95	0	0,12	0,88	328	768	441

xj	k=0.1, b=0.6 (ap. 1)			k= 0.08, b=0.5 (ap. 2)			Infectados		
	sj	ij	rj	sj	ij	rj	ap.1	ap. 2	reales
47	0	0,05	0,95	0	0,11	0,89	295	707	435
48	0	0,04	0,96	0	0,1	0,9	266	651	579
49	0	0,04	0,96	0	0,09	0,91	240	600	206
50	0	0,03	0,97	0	0,08	0,91	216	552	130
51	0	0,03	0,97	0	0,08	0,92	195	509	120
52	0	0,03	0,97	0	0,07	0,93	175	468	143
53	0	0,02	0,97	0	0,07	0,93	158	431	146
54	0	0,02	0,98	0	0,06	0,94	142	397	102
55	0	0,02	0,98	0	0,06	0,94	128	366	43
56	0	0,02	0,98	0	0,05	0,95	115	337	450
57	0	0,02	0,98	0	0,05	0,95	104	310	20
58	0	0,01	0,98	0	0,04	0,95	94	285	310
59	0	0,01	0,99	0	0,04	0,96	84	263	26
60	0	0,01	0,99	0	0,04	0,96	76	242	11
61	0	0,01	0,99	0	0,03	0,96	68	223	18
62	0	0,01	0,99	0	0,03	0,97	62	205	27
63	0	0,01	0,99	0	0,03	0,97	56	189	29
64	0	0,01	0,99	0	0,03	0,97	50	174	39
65	0	0,01	0,99	0	0,02	0,97	45	160	39

## G. Cuarta aproximación

xj	k=0.08, b=0.5 (ap. 1)			k=0.09, b=0.55 (ap. 2)			Infectados		
	sj	ij	rj	sj	ij	rj	ap. 1	ap. 2	reales
0	1	0	0	1	0	0	6	6	6
1	1	0	0	1	0	0	8	9	12
2	1	0	0	1	0	0	12	13	19
3	1	0	0	1	0	0	17	19	25
4	1	0	0	1	0	0	24	27	31
5	0,99	0,01	0	0,99	0,01	0	34	39	38
6	0,99	0,01	0	0,99	0,01	0	49	57	44
7	0,99	0,01	0	0,98	0,01	0	69	84	60
8	0,98	0,02	0	0,98	0,02	0	98	121	80
9	0,97	0,02	0	0,97	0,03	0,01	138	176	131
10	0,96	0,03	0,01	0,95	0,04	0,01	194	253	131
11	0,95	0,04	0,01	0,93	0,06	0,01	272	364	259
12	0,93	0,06	0,01	0,9	0,08	0,02	379	517	467
13	0,9	0,08	0,02	0,86	0,11	0,02	525	728	688
14	0,87	0,11	0,02	0,81	0,16	0,03	720	1009	776

xj	k=0.08, b=0.5 (ap. 1)			k=0.09, b=0.55 (ap. 2)			Infectados		
	sj	ij	rj	sj	ij	rj	ap. 1	ap. 2	reales
15	0,82	0,15	0,03	0,74	0,21	0,05	974	1368	1776
16	0,76	0,2	0,04	0,66	0,28	0,07	1295	1803	1460
17	0,68	0,26	0,06	0,56	0,35	0,09	1682	2292	1739
18	0,59	0,33	0,08	0,45	0,43	0,12	2121	2787	1984
19	0,5	0,4	0,11	0,34	0,5	0,16	2581	3223	2101
20	0,4	0,46	0,14	0,25	0,54	0,21	3016	3540	2590
21	0,31	0,52	0,17	0,17	0,57	0,26	3375	3707	2827
22	0,23	0,56	0,22	0,12	0,57	0,31	3621	3729	3233
23	0,16	0,58	0,26	0,08	0,56	0,36	3741	3639	3892
24	0,12	0,58	0,31	0,06	0,53	0,41	3748	3475	3697
25	0,08	0,56	0,35	0,04	0,5	0,46	3666	3271	3151
26	0,06	0,54	0,4	0,03	0,47	0,5	3524	3049	3387
27	0,04	0,51	0,44	0,02	0,43	0,54	3347	2823	2653
28	0,03	0,48	0,48	0,02	0,4	0,58	3152	2602	2984
29	0,02	0,45	0,52	0,01	0,37	0,62	2950	2391	2473
30	0,02	0,42	0,56	0,01	0,34	0,65	2750	2193	2022
31	0,01	0,39	0,59	0,01	0,31	0,68	2556	2008	1820
32	0,01	0,36	0,62	0,01	0,28	0,71	2371	1836	1998
33	0,01	0,34	0,65	0,01	0,26	0,74	2195	1678	1506
34	0,01	0,31	0,68	0	0,24	0,76	2030	1532	1278
35	0,01	0,29	0,7	0	0,22	0,78	1876	1399	2051
36	0,01	0,27	0,73	0	0,2	0,8	1732	1276	1772
37	0,01	0,25	0,75	0	0,18	0,82	1599	1164	1891
38	0	0,23	0,77	0	0,16	0,83	1475	1061	399
39	0	0,21	0,79	0	0,15	0,85	1360	968	894
40	0	0,19	0,8	0	0,14	0,86	1254	882	397
41	0	0,18	0,82	0	0,12	0,87	1156	804	650
42	0	0,16	0,83	0	0,11	0,89	1065	733	415
43	0	0,15	0,85	0	0,1	0,9	982	668	518
44	0	0,14	0,86	0	0,09	0,9	905	608	412
45	0	0,13	0,87	0	0,09	0,91	833	554	439
46	0	0,12	0,88	0	0,08	0,92	768	505	441
47	0	0,11	0,89	0	0,07	0,93	707	460	435
48	0	0,1	0,9	0	0,06	0,93	651	419	579
49	0	0,09	0,91	0	0,06	0,94	600	382	206
50	0	0,08	0,91	0	0,05	0,94	552	348	130
51	0	0,08	0,92	0	0,05	0,95	509	317	120
52	0	0,07	0,93	0	0,04	0,95	468	288	143
53	0	0,07	0,93	0	0,04	0,96	431	263	146
54	0	0,06	0,94	0	0,04	0,96	397	239	102
55	0	0,06	0,94	0	0,03	0,97	366	218	43

xj	k=0.08, b=0.5 (ap. 1)			k=0.09, b=0.55 (ap. 2)			Infectados		
	sj	ij	rj	sj	ij	rj	ap. 1	ap. 2	reales
56	0	0,05	0,95	0	0,03	0,97	337	198	450
57	0	0,05	0,95	0	0,03	0,97	310	181	20
58	0	0,04	0,95	0	0,03	0,97	285	165	310
59	0	0,04	0,96	0	0,02	0,98	263	150	26
60	0	0,04	0,96	0	0,02	0,98	242	136	11
61	0	0,03	0,96	0	0,02	0,98	223	124	18
62	0	0,03	0,97	0	0,02	0,98	205	113	27
63	0	0,03	0,97	0	0,02	0,98	189	103	29
64	0	0,03	0,97	0	0,01	0,98	174	94	39
65	0	0,02	0,97	0	0,01	0,99	160	85	39