TEMA 8: PROBABILIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:
- **a)** El número de habitantes de las provincias españolas.
- **b)** El área de un cuadrado del que se conoce el lado.
- **c)** Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.
- **d)** Saber si el próximo año es bisiesto.

2. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Escribir en seis tarjetas cada una de las letras de la palabra MONEDA y sacar una al azar*".

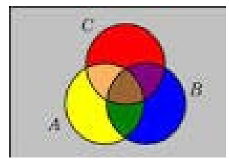
3. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Sacar una bola de una bolsa que tiene bolas negras, rojas y blancas*".

4. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos dados*.

5. Comprueba, utilizando el ejemplo anterior, que se verifican las 10 propiedades del Álgebra de Sucesos.

6. Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un oro y A al suceso sacar un rey. Escribe los sucesos: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, A^C, $(A \cup B)^C$, $A^C \cup B^C$.

7. Utiliza un diagrama de *Venn* para escribir a $A \cup B \cup C$ como unión de conjuntos disjuntos.



8. Considera ahora un diagrama de Venn con sólo dos conjuntos, y representa en él la siguiente situación: Se sabe que en un grupo de trabajo de 35 personas, hay 15 personas que toman té, 27 que toman café y 2 personas que no toman ninguna bebida.

A) ¿Suman más de 35? Eso es porque hay personas que toman té y café, ¿cuántas?
B) ¿Cuántas personas sólo toman té y cuántas toman sólo café?
C) Vamos a llamar A al conjunto de las personas que toman té, y B al de las que toman café. Nombra con letras a los conjuntos siguientes e indica de cuántas personas están formados: a) Toman café y té. b) No toman ni café ni té. c) Toman té o bien toman té. d) Toman té y no toman café.
D) De entre las personas que toman café, ¿cuántas toman también té? A este conjunto lo nombramos A/B.
E) ¿Cuántas personas no toman café? Nómbralo con letras.
F) ¿Cuántas personas toman al menos una de las dos bebidas? Compara el resultado con el de las personas que no toman ninguna de las dos medidas.

9. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.

10. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

11. Calcula la probabilidad de, al tirar un dado dos veces, sacar un 6 doble.

12. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un múltiplo de 2 o bien un múltiplo de 3.

13. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un múltiplo de 2 y además un múltiplo de 3.

14. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un número menor que 4 o bien un número mayor que 2.

15. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un número menor que 4 y además un número mayor que 2.

16. Tiramos dos dados. Calcula la probabilidad de que la suma de sus caras superiores sea 7.

17. Tiramos dos dados. Calcula la probabilidad de que la suma de sus caras superiores menor que 7.

18. ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 6 al tirar un dado? ¿Y de sacar un 7? ¿Y de sacar un número menor que 5 o bien un número mayor que 3?

19. Al tirar una moneda tres veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

20. En tu cuaderno, dibuja un diagrama en árbol similar al anterior con los sucesos A y B: A = *sacar un oro* en la primera extracción, $\overline{A}$ = *no sacar oro*, y B = *sacar un oro* en la segunda extracción, $\overline{B}$ = *no sacar oro en la segunda extracción*. A) ¿Cuál es la probabilidad de *sacar oro* en la segunda extracción condicionado a *no* haberlo sacado en la primera? B) ¿Y la de *no sacar oro* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? C) ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos oros*? D) ¿Y la de sacar un solo *oro*? E) ¿Y la de sacar al menos un oro?

21. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de "*no salen* 2 *oros*" y la de "*no sale ningún oro*".

22. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda*: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no sacar ningún* 6, y utilizar el suceso contrario.

23. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 10, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Calcula $P(A)$ y $P(B)$. b) Calcula las probabilidades de: $P(A\cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap \overline{B})$; $P(\overline{A} \cap B)$; $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. c) Calcula $P(A/B)$; $P(A/\overline{B})$; $P(\overline{A}/B)$.

24. La probabilidad del suceso A es 2/3, la del suceso B es 3/4 y la de la intersección es 5/8. Halla: La probabilidad de que se verifique alguno de los dos. La probabilidad de que no ocurra B. La probabilidad de que no se verifique ni A ni B. La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.

25. En un supermercado se ha estudiado el número de clientes que compran tres productos A, B y C. Del estudio se ha obtenido que un 14 % de los clientes compra el producto A y un 12 % compra el producto B. Además, un 4 % compra A y B, un 2 % compra A y C y ningún cliente que compre C compra también B. ¿Cuántos clientes compran únicamente el producto *B*? Sabiendo que un cliente ha comprado *A*, ¿cuál es la probabilidad de que también haya comprado *C* pero no *B*?

26. Sean *A* y *B* dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que $P(A)$ = 1/3, $P(B)$ =1/5 y $P(A \cup B)$ = 7/15, hallar: La probabilidad de que se verifique *A* y *B*. La probabilidad de que se verifique *A* y no *B*. La probabilidad de que no se verifique ni *A* ni *B*. La probabilidad de que no se verifique *A*, si no se ha verificado *B*. Selectividad.

27. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A)=\frac{3}{4}, P(B)=\frac{1}{2}, P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{20}$

Calcular: $P(A\cup B),\ P(A\cap B),\ P(\overline{A}/B),\ P(\overline{B}/A)$.

28. Se considera dos sucesos A y B tales que: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Calcula razonadamente: (a) $P(A \cap B)$. (b) $P(B)$. (c) $P(\overline{B}/A)$ (d) $P(\overline{A}/\overline{B})$. *Nota.* $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S|T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.

29. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido por negligencia siendo $P(N) = 0.4$.

30. Una fábrica de móviles desecha normalmente el 0.02 % de su producción por probabilidad de que: a) Al coger dos móviles al azar haya que desechar ambos. b) Al desechar sólo uno. c) Al coger dos móviles al azar no haya que desechar ninguno. probabilidad de desechar los tres. e) Calcula la probabilidad de al verificar 3 móviles r

31. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A) = 0.99$; $P(B) = 0.96$ y $P(C) = 0.97$. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

32. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).

33. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (C)	**Accidente en zona urbana (U)**	**Totales**
Accidente con víctimas (V)	0.3		0.4
Accidente con sólo daños materiales (M)			
Totales	0.7		1

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.
b) Determina las siguientes probabilidades: $P(V \cap C)$; $P(V \cap U)$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ y $P(U)$.
c) Calcula $P(U/V)$; $P(C/V)$; $P(V/U)$; $P(V/C)$. ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

34. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) o mortales (M). *Observa que* lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

35. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	No A = $\overline{A}$	
B	0.3	0.1	0.4
No B = $\overline{B}$	0.5	0.1	0.6
	0.8	0.2	1

37. Se sabe que en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un doceavo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es un veinticincoavo. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.
(a) Si la persona elegida es hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.
(b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo?

38. Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

a) El segundo caramelo sea de fresa.

b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero.

39. En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar. a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés. b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

40. Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que: a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo. b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre *A*. Selectividad

41. Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 10 bolas blancas y 8 bolas negras. La segunda con 5 bolas blancas y 3 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?

42. En un proceso de fabricación de bombillas se detecta que el 1 % salen defectuosas. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 95 % de las bombillas defectuosas, pero señala como defectuosas un 2 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcta una bombilla que el dispositivo ha calificado como defectuosa. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuosa una bombilla que el dispositivo ha calificado como correcta. *Ayuda*: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.

43. Se tienen 3 cajas, A, B y C. La caja A tiene 20 bolas de las cuales 5 son negras. La caja B tiene 10 bolas con una bola negra. La caja C tiene 15 bolas con 10 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar, y es negra. Calcula la probabilidad de que se haya sacado de la caja C.

44. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 0.4. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 10, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 5. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.

45. Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar: a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector. b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

46. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina A sea defectuoso es 0.01, de que lo sea uno fabricado en B es 0.02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0.03 En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C.

a) Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso.

b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina *B*?

47. Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso:

	Pre-benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?

c) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?

d) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian francés o inglés. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés? En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán, italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?

2. Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de: a) Sacar un número impar. b) No sacar un 3. c) Sacar un número mayor que 3. d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar. e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.

3. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.

4. Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge.

5. Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.

6. Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de: A) No salga ninguna cara. B) Salga al menos una cara. C) Salgan dos caras y una cruz.

7. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, …. sea 12.

8. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso "sea 9" y el suceso "sea 10" y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que *Galileo*!

9. Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso "Salga cara y un número par". B al suceso "Salga cruz y un número primo" y C al suceso "salga un número primo". Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.

10. Lanzamos una moneda 50 veces, ¿qué es más probable, obtener 50 caras seguidas o obtener en las primeras 25 tiradas cara y en las 25 siguientes cruz? Razona la respuesta.

11. Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y de obtener cruz al tirar la moneda.

12. Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.

13. Siete parejas de novios están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. b) Sean una pareja de novios. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja de novios. d) No haya ninguna pareja de novios.

14. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.

15. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Al menos una sea rubia. C) Ninguna sea rubia. D) Una sea rubia y la otra no.

16. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.

17. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.

RESUMEN

Sucesos	Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o **sucesos posibles**. Un **suceso** es un subconjunto del conjunto de posibles resultados.	Tiramos un dado. Posibles resultados = {1, 2, 3, 4, 5, 6} Suceso *obtener múltiplo de* 3 = {3, 6}
Asignación de probabilidades	Una medida Límite al que tienden las frecuencias relativas. Regla de Laplace: Si los sucesos elementales son equiprobables entonces: p = casos favorables / casos posibles.	P(5) = 1/6. P(sacar múltiplo de 3) = 2/6
Axiomática de Kolmogorov	1. $P(E) = 1$. 2. $P(A) \geq 0$, para todo A. 3. Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	
Propiedades de la Probabilidad	Suceso contrario: $P(X) + P(noX) = 1$. Sucesos dependientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$. Sucesos compatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	P(no 5) = 1 – 1/6 = 5/6. P(5 $\cup$ múl. 3) = 1/6 + 2/6 =3/6 P sacar primero un 5 y luego múltiplo de 3 =1/6·2/6 = 2/36
Teorema de la probabilidad total	$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)$	
Teorema de Bayes	$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$	