Índice:

PROBABILIDAD

1.1. ÁLGEBRA DE SUCESOS
1.2. ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES
1.3. AXIOMÁTICA DE KOLMOGOROV
1.4. TABLAS DE CONTINGENCIA Y DIAGRAMAS DE ÁRBOL
1.5. TEOREMAS DE LA PROBABILIDAD TOTAL Y TEOREMA DE BAYES

Resumen:

Vamos a estudiar la Teoría de la Probabilidad. El motivo es el de sus muchas aplicaciones.

Los medios de comunicación, televisión, periódicos, utilizan todos los días la Estadística y la Probabilidad: "el 40 % de los incendios son por negligencia", "el 30 % de los muertos en accidente de carretera no llevaban el cinturón de seguridad puesto", "hoy lloverá" … e incluso nosotros la usamos aunque sea de forma intuitiva, para tomar decisiones (como llevar el paraguas).

El Teorema de *Bayes* nos va servir para resolver problemas como:

> *"Conocemos la probabilidad de que un enfermo que tiene hepatitis esté algo amarillo, ¿calcula la probabilidad de que alguien que esté algo amarillo, tenga hepatitis".*

La Probabilidad y la Estadística es unirán en los próximos capítulos, en los que estudiaremos la inferencia estadística. Los intervalos de confianza y contraste de hipótesis se utilizan, como su nombre indica para *inferir* de los datos que nos suministra una muestra, conclusiones sobre la población. Por ejemplo:

> *Preguntamos a una muestra a qué partido político tiene intención de votar, e inducimos, con una cierta probabilidad, el partido que ganará las elecciones.*

PROBABILIDAD

1.1. Álgebra de sucesos

Experimento aleatorio

Un **fenómeno o experimento aleatorio** es aquel que, manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, no se puede predecir el resultado.

Ejemplos:

- *Son experimentos aleatorios:*

a) Lanzar un dado y anotar el número de la cara superior.

b) Lanzar tres dados y anotar los números de las caras superiores.

c) Si en una urna hay bolas blancas y rojas, sacar una al azar y anotar el color.

d) Tirar una moneda tres veces y anotar el número de caras obtenido

e) Sacar, sin reemplazamiento, cinco cartas de la baraja.

f) Abrir un libro y anotar la página por la que se ha abierto.

Sin embargo, soltar un objeto y comprobar que cae, calcular el coste de la fruta que hemos comprado sabiendo el peso y el precio por kg, calcular el coste del recibo de la compañía telefónica sabiendo el gasto… no son experimentos aleatorios.

Actividades propuestas

1. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:

a) El número de habitantes de las provincias españolas.

b) El área de un cuadrado del que se conoce el lado.

c) Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.

d) Saber si el próximo año es bisiesto.

Suceso, suceso elemental, espacio muestral

Al realizar un experimento aleatorio existen varios **posibles resultados** o **sucesos posibles**. Siempre se obtendrá uno de los **posibles resultados**.

Se llama **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.

El conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral,** $\boldsymbol{E}$.

Un **suceso** $\boldsymbol{S}$ es un subconjunto del conjunto de posibles resultados, es decir, del espacio muestral:

$$\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{E}.$$

Ejemplos:

- *Los posibles resultados al tirar una moneda son que salga* cara *o salga* cruz. *El conjunto de sucesos elementales es* {*cara, cruz*}.
- *El conjunto de posibles resultados de los experimentos aleatorios siguientes:*

a) Extraer una bola de una bolsa con 9 bolas blancas y 7 negras es E = {*blanca*, *negra*}.

b) Sacar una carta de una baraja española es E = {As de Oros, 2O, 3O,…, SO, CO, RO, As de Copas, …, RC, As de Bastos, …, RB, As de Espadas,…, RE}

- *Al lanzar un dado, el conjunto de posibles resultados es* E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, el suceso A obtener par es A = {2, 4, 6}, el suceso B obtener impar es B = {1, 3, 5}, el suceso C obtener múltiplo de 3 es C = {3, 6}, el suceso D sacar un número menor que 3 es D = {1, 2}.
- *Al lanzar dos monedas el conjunto de posibles resultados es* E = {(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)}. El suceso *sacar cero caras* es A = {(+, +)}, *el suceso sacar una cara* es B = {(C, +), (+, C)} *y el suceso sacar dos caras* C = {(C, C)}.

Actividades propuestas

2. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Escribir en seis tarjetas cada una de las letras de la palabra MONEDA y sacar una al azar*".

3. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Sacar una bola de una bolsa que tiene bolas negras, rojas y blancas*".

4. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos dados*.

Operaciones con sucesos

Dados dos sucesos A y B:

La **unión**: $A \cup B$ se verifica si bien se verifica A **o bien** se verifica B.

La **intersección**: $A \cap B$ se verifica si se verifica A **y además** se verifica B.

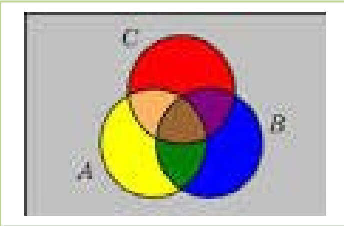
La **diferencia**: $A - B$ se verifica si se verifica A y **no** se verifica B.

La unión, intersección y diferencia de dos sucesos aleatorios, son también sucesos aleatorios, pues son subconjuntos del espacio muestral.

Las operaciones con sucesos verifican las mismas **propiedades** que las operaciones con conjuntos:

Asociativa:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Distributiva:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Simplificativa:	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
Leyes de Morgan:	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Todas ellas puedes comprenderlas representando conjuntos usando diagramas de *Venn*.



Ejemplos:

- *Al lanzar un dado, hemos llamado A al suceso obtener par*: $A = \{2, 4, 6\}$, y B al suceso obtener múltiplo de 3: $B = \{3, 6\}$. Entonces $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$, $A \cap B = \{6\}$, $A - B = \{2, 4\}$.

Actividades propuestas

5. Comprueba, utilizando el ejemplo anterior, que se verifican las 10 propiedades del Álgebra de Sucesos. ***Por ejemplo:*** Vamos a comprobar la Ley de Morgan: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$:

$A \cap B = \{6\} \rightarrow (A \cap B)^C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$A = \{2, 4, 6\} \rightarrow A^C = \{1, 3, 5\}$; $B = \{3, 6\} \rightarrow B^C = \{1, 2, 4, 5\}$; $A^C \cup B^C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

6. Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un oro y A al suceso sacar un rey. Escribe los sucesos: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, A^C, $(A \cup B)^C$, $A^C \cup B^C$.

Suceso seguro, suceso imposible y suceso contrario

Se considera un suceso al espacio muestral, E, y se le denomina **suceso seguro**.

Observa que al realizar el experimento aleatorio es seguro que sale uno de los posibles resultados, luego es seguro que se verifica E.

El conjunto vacío es un subconjunto de E luego es un suceso aleatorio. Como suceso al conjunto vacío, $\varnothing$, se le llama **suceso imposible**. Observa que como no tiene elementos es imposible que se verifique.

Dado un suceso A, se denomina **suceso contrario** (o **suceso complementario**) de A, y se escribe $\overline{A}$, (o A', o A^C, o *no*A), al suceso $E - A$, es decir, está formado por los elementos del espacio muestral que **no** están en el suceso A.

Sucesos incompatibles

Dos sucesos A y B son **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$. En caso contrario se llaman sucesos **compatibles**.

Ejemplos:

- *Al sacar una carta de una baraja, si* A = "Sacar un *as*" y B = "Sacar *bastos*" y C = "Sacar un *rey*". Entonces los sucesos A y B son compatibles pues podemos sacar el *as de bastos*, pero los sucesos A y C son incompatibles pues $A \cap C = \varnothing$, ninguna carta es a la vez *as* y *rey*.

Actividades propuestas

7. Utiliza un diagrama de *Venn* para escribir a $A \cup B \cup C$ como unión de conjuntos disjuntos.

8. Considera ahora un diagrama de *Venn* con sólo dos conjuntos, y representa en él la siguiente situación: Se sabe que en un grupo de trabajo de 35 personas, hay 15 personas A que toman té, 27 que toman café B y 2 personas que no toman ninguna bebida: $(A \cup B)^C$. A) ¿Suman más de 35? Eso es porque hay personas que toman té y café, ¿cuántas? Escríbelo en función de A y B, y represéntalo en el diagrama de *Venn*. B) ¿Cuántas personas sólo toman té y cuántas toman sólo café? C) Nombra con letras a los conjuntos siguientes e indica de cuántas personas están formados: a) Toman café y té. b) No toman ni café ni té. c) Toman té o bien toman té. d) Toman té y no toman café. D) De entre las personas que toman café, ¿cuántas toman también té? A este conjunto lo nombramos A/B. E) ¿Cuántas personas no toman café? Nómbralo con letras e indícalo en el diagrama. F) ¿Cuántas personas toman al menos una de las dos bebidas? Compara el resultado con el de las personas que no toman ninguna de las dos medidas.

1.2. Asignación de probabilidades

Existe una definición axiomática de probabilidad debida a *Kolmogorov* relativamente reciente (1930), pero antes ya se había sido usado este concepto por ejemplo por *Fermat* y *Pascal* en el siglo XVII que se escribieron cartas reflexionando sobre lo que ocurría en los juegos de azar. Cuando no comprendían cómo asignar una determinada probabilidad, jugaban muchas veces al juego que fuese y veían a qué valor se aproximaban las frecuencias relativas. Así, la **probabilidad de un suceso** podría definirse como el **límite al que tienden las frecuencias relativas** de ese suceso cuando el número de experimentos es muy alto. Si los sucesos elementales son equiprobables, es decir, a todos ellos les podemos asignar la misma probabilidad, (si la moneda no está trucada, si el dado no está trucado…) se puede usar la Relgla de *Laplace*: Por tanto:

Para calcular probabilidades se usan dos técnicas, una experimental, *a posteriori*, analizando las **frecuencias relativas** de que ocurra el suceso, y la otra por simetría, *a priori*, cuando se sabe que los sucesos elementales son **equiprobables,** entonces **se divide el número de casos favorables por el número de casos posibles.**

Esto último, cuando se puede usar, simplifica la forma de asignar probabilidades y se conoce como **Regla de *Laplace*** que dice que:

Regla de *Laplace*

"Si los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de un suceso es el número de casos favorables dividido por el número de casos posibles":

$$P(A) = \frac{\textit{número de casos favorables al suceso } A}{\textit{número de casos posibles}}$$

La regla de *Laplace* está basada en el *principio de razón insuficiente*: si a priori no existe ninguna razón para suponer que un resultado se puede presentar con más probabilidad que los demás, podemos considerar que todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Ley de los Grandes Números

Jakob Bernoulli, en 1689, definió *probabilidad* utilizando la *Ley de los Grandes Números*, que dice que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse cuando el número de pruebas tiende a infinito.

A ese número al que tienden las frecuencias relativas lo llamó probabilidad.

Puedes comprender que esta definición tiene graves inconvenientes. No sabemos cuántas pruebas debemos realizar. Hay que hacer *muchas* y en las mismas condiciones. Se obtiene un valor aproximado de la probabilidad.

Actividades resueltas

- La probabilidad de que salga un 3 al tirar un dado es 1/6, pues hay seis casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}, un único caso favorable, 3, y suponemos que el dado no está trucado. Si sospecháramos que el dado estuviera trucado, para asignar esa probabilidad habría que tirar el dado un montón de veces para observar hacia qué valor se acerca la frecuencia relativa de obtener un 3.

- La probabilidad de sacar un número par al tirar un dado es 3/6 = 1/2 pues hay seis casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}, y los casos favorables son 3, {2, 4, 6} y suponemos que el dado no está trucado, luego todos ellos son equiprobables, por lo que aplicamos la Regla de Laplace.
- La probabilidad de que al cruzar la calle te pille un coche NO es 1/2, aunque sólo hay dos casos posibles, que te pille el coche y que no te pille, pues ya te habría pillado un montón de veces. Para calcular esa probabilidad se recogen datos de peatones atropellados y se calcula utilizando las frecuencias relativas.
- Si consideramos una baraja española de 40 cartas y elegimos una carta, algunos de los sucesos que pueden ocurrir son "*sacar una copa*", o "*sacar un caballo*", o "*sacar el caballo de copas*"… Como de antemano no sabemos lo que va a ocurrir decimos que estos sucesos son *aleatorios* o de *azar*. Antes de sacar ninguna carta todas ellas son igualmente factibles, y como puede salir una cualquiera de las 40 cartas decimos que la probabilidad, de por ejemplo, *sacar el caballo de copas* es 1/40, la de *sacar una copa* es 10/40, y la de un *caballo* es 4/40.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un rey o bien una copa? ¿Y de sacar un rey y además una copa? Debemos calcular P(rey $\cup$ copa), hay 40 cartas (caso posibles), 4 reyes y 10 copas, pero está el el rey de copas (que lo estaríamos contando dos veces), luego los caso favorables son 13, y P(rey $\cup$ copa). Debemos calcular P(rey $\cap$ copa), como hay un único rey de copas, es 1/40.
- *En una clase hay* 15 *chicos y* 14 *chicas. Como no se presenta nadie para ser delegado y subdelegado se hace un sorteo al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que en la clase tanto la delegada como la subdelegada sean chicas?* Los casos posibles son 29·28, ¿por qué? y los casos favorables son 14·13, ¿por qué?, *de acuerdo con la Ley de* Laplace*, la probabilidad pedida es*

$$P(A) = \frac{número de casos\ favorables al\ suceso A}{número de casos\ posibles} = \frac{14 \cdot 13}{29 \cdot 28} = 0'22$$

Actividades propuestas

9. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.

10. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

11. Calcula la probabilidad de, al tirar un dado dos veces, sacar un 6 doble.

12. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un múltiplo de 2 o bien un múltiplo de 3.

13. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un múltiplo de 2 y además un múltiplo de 3.

14. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un número menor que 4 o bien un número mayor que 2.

15. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un número menor que 4 y además un número mayor que 2.

16. Tiramos dos dados. Calcula la probabilidad de que la suma de sus caras superiores sea 7.

17. Tiramos dos dados. Calcula la probabilidad de que la suma de sus caras superiores menor que 7.

1.3. Axiomática de *Kolmogorov*

El matemático ruso *Andrey Kolmogorov* (1903, 1987) basándose en las propiedades del álgebra de suceso y en las propiedades de las frecuencias relativas dio una definición de probabilidad basada en un sistema de axiomas.

La definición axiomática de *Kolmogorov* es más complicada que la que viene a continuación. Pero esta simplificación puede servirnos:

Definición

La probabilidad es una aplicación (función) que asigna a cada suceso A de un espacio muestral E un número real que debe verificar las siguientes propiedades:

$$E \to R$$

$$A \to P(A)$$

1.- La probabilidad del suceso seguro es 1:

$$P(E) = 1.$$

2.- La probabilidad de cualquier suceso siempre es un número no negativo:

$$P(A) \geq 0, \text{ para todo } A.$$

3.- Si dos sucesos son incompatibles entonces la probabilidad de la unión es la suma de sus probabilidades:

$$\text{Si } A \cap B = \varnothing \text{ entonces } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Las dos últimas las verifican todas las medidas. La probabilidad es una medida.

Consecuencias de los axiomas

De estos axiomas se deducen las siguientes propiedades:

a) La probabilidad del suceso contrario es 1 menos la probabilidad del suceso:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Demostración:

En efecto, un suceso y su suceso contrario son incompatibles, y su unión es el suceso seguro. Por lo que usando los axiomas 1 y 3 se tiene:

$$1 = P(E) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

b) La probabilidad del suceso imposible es 0:

$$P(\varnothing) = 0.$$

Demostración:

En efecto, el suceso imposible es el suceso contrario del suceso seguro, por lo utilizando la propiedad anterior y el axioma 1, se tiene:

$$P(\varnothing) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0.$$

a) La probabilidad de un suceso (finito) es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

Demostración:

En efecto, los sucesos elementales son incompatibles entre sí, luego si $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ por el axioma 3 se tiene que:

$$P(A) = P\{a_1, a_2, ..., a_n\} = P(a_1) + P(a_2) + ... + P(a_n).$$

Si los sucesos elementales son equiprobables de esta propiedad se deduce la regla de *Laplace*.

Actividades resueltas

- *¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos un 6 al tirar dos dados?*

El suceso *sacar al menos un 6* es el suceso **contrario** al de no sacar ningún 6. La probabilidad de no sacar un 6 en el primer dado es 5/6, luego la probabilidad de no sacar ningún 6 es (5/6)·(5/6). La probabilidad de sacar al menos un 6, al ser el suceso contrario es:

$$P(\textit{Sacar al menos un } 6) = 1 - P(\textit{No sacar ningún } 6) = 1 - (5/6)\cdot(5/6) = 11/36.$$

Actividades propuestas

18. ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 6 al tirar un dado? ¿Y de sacar un 7? ¿Y de sacar un número menor que 5 o bien un número mayor que 3?

19. Al tirar una moneda tres veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

Sucesos compatibles e incompatibles

Ejemplo:

- Al tirar un dado, ¿cuál es la probabilidad de sacar un número menor que 2 o bien un número mayor que 5?

$A = \{1\}$, $B = \{6\}$. Debemos calcular $P(A \cup B) = P(1, 6) = 2/6$. Los sucesos A y B son incompatibles, no se verifican a la vez, luego $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1/6 + 1/6$…,Hay 10 copas y 10 oros, y ninguna carta es a la vez copa y oro, luego la probabilidad es 20/40.

- Al tirar un dado, ¿cuál es la probabilidad de sacar un múltiplo de 2 o bien un múltiplo de 3?

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$. Debemos calcular $P(A \cup B) = \{2, 3, 4, 6\} = 4/6$. Los sucesos A y B son compatibles, pues el número 6 es a la vez múltiplo de 2 y de 3. Ahora no se verifica que la probabilidad de la unión sea igual a la suma de probabilidades, pues: $P(A) + P(B) = 3/6 + 2/6 = 5/6$.

Llamamos **sucesos incompatibles** a los que no pueden realizarse a la vez, por lo que su intersección es el suceso imposible, y **sucesos compatibles** a los que pueden realizarse a la vez.

Designamos $P(A \cup B)$ a la probabilidad del suceso "*se verifica A o bien se verifica B*". Hemos visto en el ejemplo que si los sucesos son incompatibles su probabilidad es igual a la suma de las probabilidades, pues se verifica el axioma 3 de *Kolmogorov*.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si A y B son incompatibles.

Pero si A y B tienen una intersección no vacía, pueden verificarse a la vez, habrá que restar esos casos, esas veces en que se verifican A y B a la vez.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, si A y B son compatibles.

Esta segunda expresión es más general que la primera, ya que en el caso en que A y B son incompatibles entonces $P(A \cap B) = 0$.

Actividades resueltas

- *Calcula la probabilidad de los sucesos siguientes: a) Sacar una sota o una figura; b) No sale una sota o sale un sota; c) Sacar un oro o una figura.*

a) Hay 4 sotas y hay 4 · 4 = 16 figuras (as, sota, caballo y rey), pero las cuatro sotas son figuras, por tanto P(Sota ∪ Figura) = 4/40 + 16/40 – 4/40 = 16/40 = 0.4.

b) Hay 40 – 4 = 36 cartas que no son sotas, y hay 4 sotas, luego P(no sota ∪ sota) = 36/40 + 4/40 = 1. Esta conclusión es más general. Siempre:

$P(\overline{A} \cup A) = 1$,

pues un suceso y su contrario ya vimos que verificaban que $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

c) Hay 10 oros y hay 16 figuras, pero hay 4 figuras que son a la vez oros (as, sota, caballo y rey), luego P(Oro ∪ Figura) = 10/40 + 16/40 – 4/40 = 22/40 = 11/20.

Sucesos dependientes e independientes

Ejemplo:

- Tenemos una bolsa con 7 bolas rojas y 3 bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar una bola roja*? Si sacamos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de *sacar dos bolas rojas*?

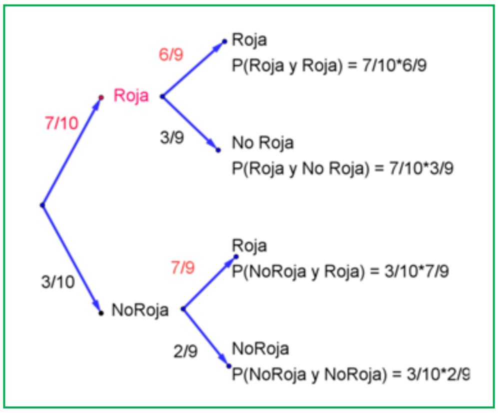
La probabilidad de sacar una bola roja es 7/10. Pero la de sacar dos bolas rojas, ¡depende!

Depende de si volvemos a meter en la bolsa la primera bola roja, o si la dejamos fuera.

En el primer caso decimos que es **con reemplazamiento** y en el segundo, **sin reemplazamiento**.

Si la volvemos a meter, la probabilidad de sacar bola roja volverá a ser 7/10, y la probabilidad de sacar dos bolas rojas es 7/10 · 7/10 = 0.49. La probabilidad de esta segunda bola *no depende* de lo que ya hayamos sacado, y en este caso la probabilidad se obtiene multiplicando.

Si los sucesos A y B son **independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$**.



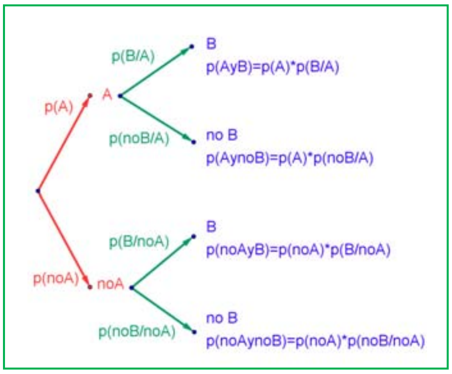
Pero si la dejamos fuera, ahora en la bolsa sólo hay 9 bolas y de ellas sólo quedan 6 bolas rojas, luego la probabilidad de que esa segunda bola sea roja es 6/9, y está **condicionada** por lo que antes hayamos sacado.

Se escribe: P(Roja/Roja) y se lee *"probabilidad de Roja condicionada a haber sacado Roja"*.

La probabilidad de sacar dos bolas rojas es ahora: 7/10 · 6/9 = 42/90 = 0.46.

Observa el diagrama de árbol y comprueba que la probabilidad de sacar primero una bola roja y luego una bola negra (no Roja) es 7/10 · 3/9 = 21/90 pues después de sacar una bola roja en la bolsa quedan sólo 9 bolas y de ellas 3 son negras. La probabilidad de sacar primero una bola negra (no Roja) y luego bola Roja es 3/10 · 7/9 = 21/90, y la de sacar dos bolas negras es: 3/10 · 2/9 = 6/90.

Los sucesos son dependientes. El que ocurra A, o no ocurra A, afecta a la probabilidad de B. Por eso se dice que B **está condicionado** a A.



Si los sucesos A y B son **dependientes** entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Pero observa más cosas.

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$: 7/10 + 3/10 = 1; 6/9 + 3/9 = 1; 7/9 + 2/9 = 1.

$P(E) = P(A_1)+P(A_2)+ \ldots +P(A_n) = 1$: 42/90 + 21/90 + 21/90 + 6/90 = 1

Actividades resueltas

- *Sacamos dos cartas de una baraja de* 40 *cartas sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos oros?*

Si fuera con reemplazamiento la probabilidad sería 10/40 · 10/40, pero al ser sin reemplazamiento la probabilidad del segundo *oro* viene *condicionada* por que hayamos sacado un *oro* previamente. Ahora en la baraja ya no quedan 40 cartas sino 39, y no quedan 10 oros sino sólo 9, luego la probabilidad es:

10/40 · 9/39 = 3/52.

Observa que:

Si dos sucesos son **dependientes** entonces: $P(B/A) \neq P(B)$.

Pero si dos sucesos son **independientes** entonces: $P(B/A) = P(B/\overline{A}) = P(B)$.

Por tanto la expresión: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ **es general, ya que si los sucesos son independientes entonces** $P(B/A) = P(B)$ **y por tanto** $P(A \cap B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$.

Resumen:

Suceso contrario:	$P(A) + P(\overline{A}) = 1$	
Intersección:	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$	**Si** A **y** B **son independientes** $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Unión:	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	**Si** A **y** B **son incompatibles** $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Actividades propuestas

20. En tu cuaderno haz un diagrama en árbol similar al anterior con los sucesos A y B: A = *sacar un oro* en la primera extracción, $\overline{A}$ = *no sacar oro*, y B = *sacar un oro* en la segunda extracción, $\overline{B}$ = *no sacar oro en la segunda extracción*. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar oro* en la segunda extracción condicionado a *no* haberlo sacado en la primera? ¿Y la de *no sacar oro* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos oros*? ¿Y la de sacar un solo *oro*? ¿Y la de sacar al menos un oro?

21. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de "*no salen* 2 *oros*" y la de "*no sale ningún oro*".

22. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda*: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no sacar ningún* 6, y utilizar el suceso contrario.

23. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 10, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Calcula $P(A)$ y $P(B)$. b) Calcula las probabilidades de: $P(A\cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap \overline{B})$; $P(\overline{A} \cap B)$; $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. c) Calcula $P(A/B)$; $P(A/\overline{B})$; $P(\overline{A}/B)$.

24. La probabilidad del suceso A es 2/3, la del suceso B es 3/4 y la de la intersección es 5/8. Halla:

(a) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos.

(b) La probabilidad de que no ocurra B.

(c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B.

(d) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.

25. En un supermercado se ha estudiado el número de clientes que compran tres productos A, B y C. Del estudio se ha obtenido que un 14 % de los clientes compra el producto A y un 12 % compra el producto B. Además, un 4 % compra A y B, un 2 % compra A y C y ningún cliente que compre C compra también B.

(a) ¿Cuántos clientes compran únicamente el producto B?

(b) Sabiendo que un cliente ha comprado A, ¿cuál es la probabilidad de que también haya comprado C pero no B?

26. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que $P(A)$ = 1/3, $P(B)$ =1/5 y $P(A\text{U}B)$ = 7/15, hallar:

a) La probabilidad de que se verifique A y B.

b) La probabilidad de que se verifique A y no B.

c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B.

d) La probabilidad de que no se verifique A, si no se ha verificado B.

27. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{2}, P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$

Calcular: $P(A\cup B), P(A\cap B), P(\overline{A}/B), P(\overline{B}/A)$.

28. Se considera dos sucesos A y B tales que: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B/A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Calcula razonadamente: (a) $P(A \cap B)$. (b) $P(B)$. (c) $P(\overline{B}/A)$ (d) $P(\overline{A}/\overline{B})$

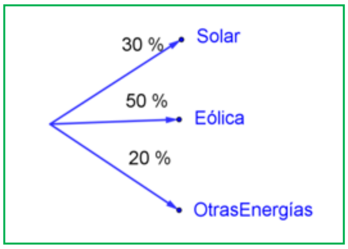
Nota. $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S/T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.

1.4. Tablas de contingencia y diagramas de árbol

Diagramas de árbol

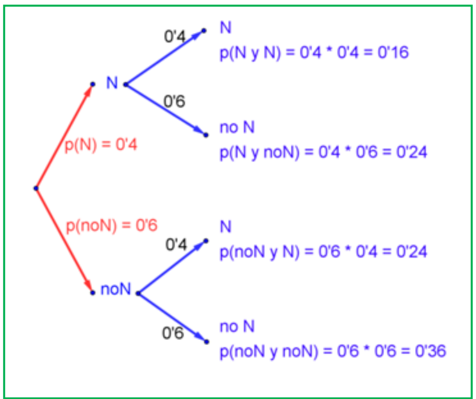
Ejemplo:

- *Se hace un estudio sobre energías alternativas y en un país el 30 % de la energía alternativa es energía solar, el 50 % eólica y el resto a otros tipos de energías. Representa esta situación con un diagrama de árbol.*



Actividades resueltas

- *Se considera que el 40 % de los incendios forestales se deben a negligencias, tomando este dato como una probabilidad, ¿cuál es la probabilidad de que al considerar dos incendios, al menos uno se deba a negligencias?*



Llamamos N al suceso "incendio debido a negligencia" con $P(N) = 0.4$, y $\overline{N} = noN$ al suceso "incendio debido a una causa distinta a una negligencia" con $P(\overline{N}) = 0.6$. Representamos la situación en un diagrama de árbol. La causa de un incendio se considera independiente de la causa del segundo incendio, por lo que tenemos que:

$$P(N, N) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16$$

que es la probabilidad de que tanto en el primer incendio como en el segundo la causa sea una negligencia

$$P(N, \overline{N}) = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24$$

que es la probabilidad de que el primer incendio se deba a una negligencia y el segundo no.

$$P(\overline{N}, N) = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24$$

$$P(\overline{N}, \overline{N}) = 0.6 \cdot 0.6 = 0.36$$

La probabilidad de que al menos uno haya sido por negligencia la podemos calcular sumando las probabilidades de (N, N), $(N, \overline{N})$ y $(\overline{N}, N)$ que es 0.16 + 0.24 + 0.24 = 0.64. Pero más sencillo es calcular la probabilidad del suceso contrario $P(\text{no } N, \text{no } N) = P(\overline{N}, \overline{N}) = 0.36$ y restarla de 1:

$$P(\text{al menos uno por negligencia}) = 1 - P(\text{ninguno por negligencia}) = 1 - 0.36 = 0.64.$$

Actividades propuestas

29. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido por negligencia siendo $P(N) = 0.4$.

30. Una fábrica de móviles desecha normalmente el 0,02 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos móviles al azar haya que desechar ambos. b) Al coger dos móviles al azar haya que desechar sólo uno. c) Al coger dos móviles al azar no haya que desechar ninguno. d) Verificamos 3 móviles, calcula la probabilidad de desechar los tres. e) Calcula la probabilidad de al verificar 3 móviles rechazar sólo el tercero.

31. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A)$ = 0.99; $P(B)$ = 0.96 y $P(C)$ = 0.97. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

32. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).

Tablas de contingencia

Ejemplo:

- Se han estudiado mil enfermos del hepatitis C analizando por un procedimiento más barato si las lesiones son graves o leves. Luego se les volvió a analizar por el procedimiento usual determinando qué diagnósticos habían sido correctos y cuáles incorrectos. Los valores obtenidos se representan en la tabla:

	Diagnóstico correcto	**Diagnóstico incorrecto**	**Totales**
Lesión maligna	412	24	436
Lesión benigna	536	28	564
Totales	948	52	1000

Determinamos la tabla de frecuencias relativas:

	Diagnóstico correcto (C)	**Diagnóstico incorrecto (I)**	**Totales**
Lesión maligna (M)	0.412	0.024	0.436
Lesión benigna (B)	0.536	0.028	0.564
Totales	0.948	0.052	1

Actividad resuelta

- *Imagina que estas frecuencias relativas pudieran tomarse como probabilidades. Interpreta entonces el significado de cada uno de estos valores.*

  0.412 sería la probabilidad de que el diagnóstico de lesión maligna fuese correcto: $P(M \cap C)$.

  0.024 = $P(M \cap I)$; 0.536 = $P(B \cap C)$; 0.028 = $P(B \cap I)$.

  ¿Y 0.436? El número de lesiones malignas es 218, luego 0.436 = $P(M)$.

  Del mismo modo: 0.564 = $P(B)$; 0.948 = $P(C)$; 0.052 = $P(I)$.

  Observa que $P(M) + P(B) = 1$ y que $P(C) + P(I) = 1$. Son sucesos contrarios.

En general se denomina **tabla de contingencias** a:

	A	No A = $\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
No B = $\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

En una tabla de contingencia figuran todas las probabilidades o contingencias de los sucesos compuestos.

Observa que:

Como sabemos por la probabilidad del suceso contrario:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \text{ y } P(B) + P(\overline{B}) = 1.$$

Observa también que:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}), \text{ del mismo modo que } P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

pues se obtienen sumando respectivamente la primera columna y la primera fila.

También: $P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$ y $P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Actividad resuelta

- *Dada la tabla de contingencia determina si los sucesos A y B son, o no, dependientes*

	A	**No A = $\overline{A}$**	
B	2/9	5/9	7/9
No B = $\overline{B}$	1/9	1/9	2/9
	3/9 = 1/3	6/9 = 2/3	1

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$, por tanto: $2/9 = 1/3 \cdot P(B/A)$, lo que nos permite obtener:

$$P(B/A) = (2/9)/(1/3) = 2/3 \approx 0.6667$$

que es distinto de $7/9 \approx 0.7778$ que es la probabilidad de B.

Se puede afirmar que A y B son dependientes ya que $P(B/A) \neq P(B)$.

Actividades propuestas

33. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (C)	**Accidente en zona urbana (U)**	**Totales**
Accidente con víctimas (V)	0.3		0.4
Accidente con sólo daños materiales (M)			
Totales	0.7		1

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

b) Determina las siguientes probabilidades: $P(V \cap C)$; $P(V \cap U)$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ y $P(U)$.

c) Calcula $P(U/V)$; $P(C/V)$; $P(V/U)$; $P(V/C)$. ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

34. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) o mortales (M). *Observa que* lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

Diagramas de árbol y tablas de contingencia

Los diagramas de árbol y las tablas de contingencia están relacionados. Dado un árbol puedes obtener una tabla de contingencia, y viceversa. Tiene interés esta relación pues con los datos del problema a veces es más sencillo construir uno de ellos y dar la solución pasando al otro.

Actividad resuelta

- *Dada la tabla de contingencia, obtener el diagrama de árbol que comienza con A y no$A$ = $\overline{A}$.*

	A	**No** A = $\overline{A}$	
B	0.4	0.3	0.7
No B = $\overline{B}$	0.2	0.1	0.3
	0.6	0.4	1

Conocemos la $P(A) = 0.6$, $P(\overline{A}) = 0.4$, $P(B) = 0.7$ y $P(\overline{B}) = 0.3$.

También conocemos $P(A \cap B) = 0.4$; $P(A \cap \overline{B}) = 0.2$; $P(\overline{A} \cap B) = 0.3$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.1$.

Nos falta conocer $P(B/A)$ que podemos obtener dividiendo $P(A \cap B)$ entre $P(A)$:

$$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A) = 0.4 : 0.6 = 4/6 = 2/3.$$

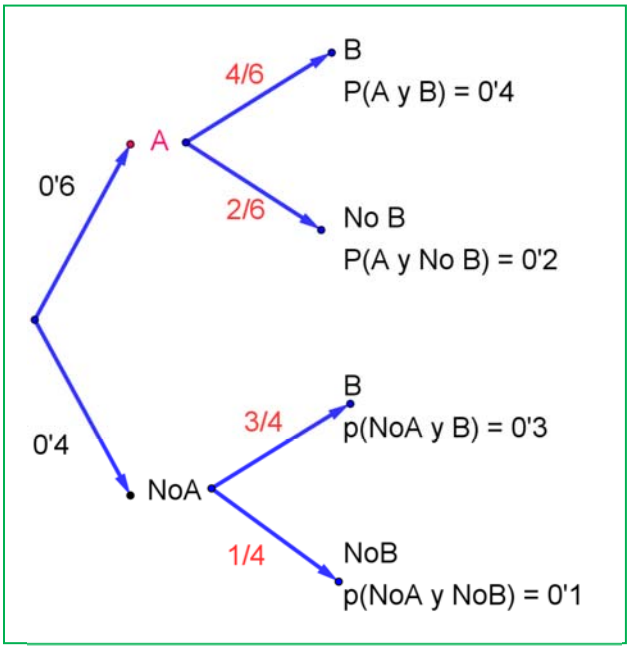
Del mismo modo calculamos:

$$P(\overline{B}/A) = P(A \cap \overline{B})/P(A) = 0.2 : 0.6 = 2/6 = 1/3.$$

$$P(B/\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B)/P(\overline{A}) = 0.3 : 0.4 = 3/4.$$

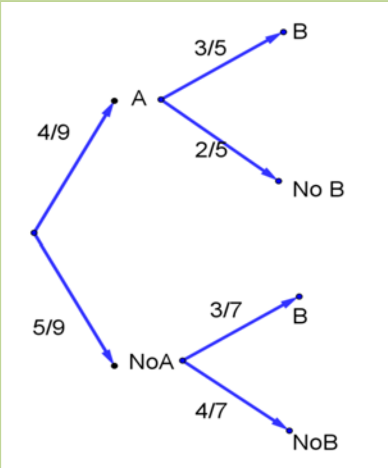
$$P(\overline{B}/\overline{A}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})/P(\overline{A}) = 0.1 : 0.4 = 1/4.$$

El árbol es del margen:



Actividad resuelta

- *Recíprocamente, dado el diagrama de árbol del margen obtener la tabla de contingencia:*



Ahora conocemos $P(A) = 4/9$ y $P(\overline{A}) = 5/9$. Además conocemos:

$$P(B/A) = 3/5;\ P(B/\overline{A}) = 3/7;\ P(\overline{B}/A) = 2/5 \text{ y } P(\overline{B}/\overline{A}) = 4/7.$$

Calculamos, multiplicando:

$$P(A \cap B) = (4/9)\cdot(3/5) = 12/45 = 4/15;$$

$$P(A \cap \overline{B}) = (4/9)\cdot(2/5) = 8/45;$$

$$P(\overline{A} \cap B) = (5/9)\cdot(3/7) = 15/63 = 5/21 \text{ y}$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = (5/9)\cdot(4/7) = 20/63.$$

Rellenamos con estos datos una tabla de contingencia:

	A	No A = $\overline{A}$	
B	12/45	15/63	
No B = $\overline{B}$	8/45	20/63	
	20/45 = 4/9	35/63 = 5/9	1

Calculamos, sumando, las casillas que nos faltan,

$$P(B) = (12/45) + (15/63) = 159/315 \text{ y}$$

$$P(\overline{B}) = (8/45) + (20/63) = 156/315$$

	A	No A = $\overline{A}$	
B	12/45	15/63	159/315
No B = $\overline{B}$	8/45	20/63	156/315
	4/9	5/9	1

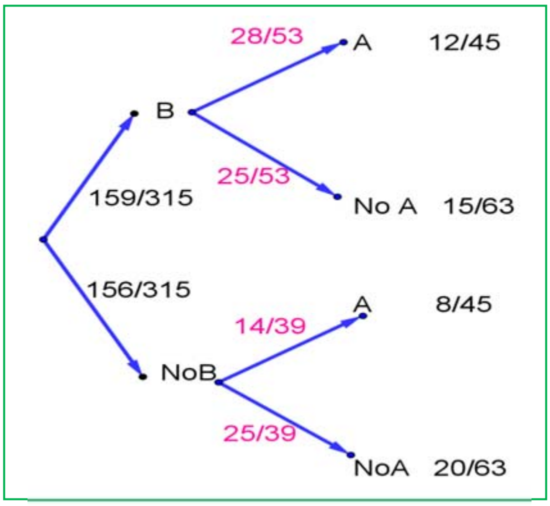
Puede ser muy interesante pasar de un diagrama de árbol a la tabla de contingencia y de ésta, al otro diagrama de árbol, con el que podemos conocer:

$$P(A/B) = (12/45)/(159/315) = 28/53;$$

$$P(\overline{A}/B) = (15/63) / (159/315) = 25/53$$

$$P(A/\overline{B}) = (8/45)/(156/315) = 14/39$$

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = (20/63)/. (156/315) = 25/39$$

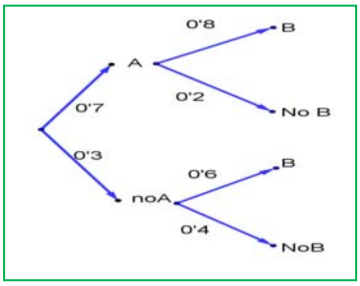


Actividades propuestas

35. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	No A = $\overline{A}$	
B	0.3	0.1	0.4
No B = $\overline{B}$	0.5	0.1	0.6
	0.8	0.2	1

36. Dado el diagrama de árbol del margen, complétalo calculando las probabilidades de las intersecciones, construye la tabla de contingencia asociada, y después el otro diagrama de árbol.



37. Se sabe que en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un doceavo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es un veinticincoavo. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.

(a) Si la persona elegida es hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.

(b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo?

38. Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

a) El segundo caramelo sea de fresa.

b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero.

39. En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.

a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.

b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

40. Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A.

41. Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 10 bolas blancas y 8 bolas negras. La segunda con 5 bolas blancas y 3 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?

1.5. Teoremas de la probabilidad total y teorema de *Bayes*

Thomas Bayes en 1763 enunció el teorema que lleva su nombre. Sirve para resolver problemas del tipo de la página inicial: "*Conocemos la probabilidad de que un enfermo que tiene hepatitis esté algo amarillo. Calcula la probabilidad de que alguien que esté algo amarillo, tenga hepatitis*". Es decir permite calcular la probabilidad de A/B conociendo la probabilidad de B/A (o mejor, las probabilidades de B condicionado a un conjunto de sucesos A_i tales que son incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral). Vamos a enunciarlo, pero ¡no te asustes! ¡Ya sabes resolver problemas en los que se usa el *Teorema de Bayes*! ¡No hace falta que te aprendas la fórmula!

Previamente vamos a enunciar un teorema que también ya has usado, el teorema de la probabilidad total, que es como un paso intermedio del teorema de *Bayes*.

Enunciado del teorema de la probabilidad total

Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas, suma de probabilidades 1. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas: $P(B/A_i)$. Entonces:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k)\cdot P(A_k)$$

Enunciado del teorema de Bayes

Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas, suma de probabilidades 1. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas: $P(B/A_i)$. Entonces:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k)\cdot P(A_k)}$$

Vamos a comprobar que ya lo sabes con un ejemplo sencillo, que ya has resuelto en las actividades propuestas del apartado anterior.

Para resolver problemas tipo *Bayes* basta construir un diagrama de árbol, luego la tabla de contingencia asociada, y a continuación el otro diagrama de árbol.

Actividades resueltas

Antes de comprobar que SÍ sabes resolver problemas tipo *Bayes*, vamos a trabajar un poco la nomenclatura de las probabilidades condicionadas.

- *Escribe con símbolos las siguientes probabilidades:*

a) Sabemos que se ha verificado B, ¿cuál es la probabilidad de A? $\rightarrow P(A/B) = P(A \cap B) : P(A)$.

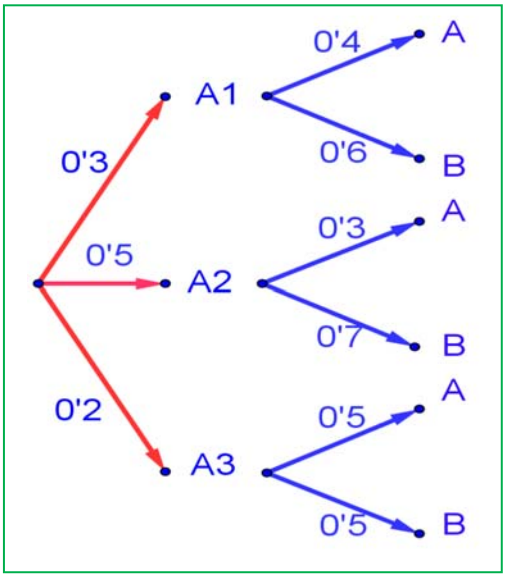
b) Probabilidad de B *y* $A \rightarrow P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A)\cdot P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B)$

c) Ha salido una bola negra (A), probabilidad de que sea de la segunda urna (B) $\rightarrow P\ (B/A)$

d) Probabilidad de B *o* $A \rightarrow P(A \cup B) = P(B \cup A)$

e) El accidente ha sido en carretera (A), probabilidad de que haya sido mortal (B) $\rightarrow P\ (B/A)$

- *Tenemos un conjunto de sucesos* $\{A_1, A_2, A_3\}$ *tales que* $E = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, *y son incompatibles dos a dos. Conocemos sus probabilidades:* $P(A_1) = 0.3$, $P(A_2) = 0.5$, $P(A_3) = 0.2$. *Tenemos otros dos sucesos incompatibles,* A *y* B, *de los que conocemos las probabilidades condicionadas* $P(A/A_1) = 0.4$, $P(B/A_1) = 0.6$, $P(A/A_2) = 0.5$, $P(B/A_2) = 0.7$, $P(A/A_3) = 0.5$, $P(B/A_3) = 0.5$. *Queremos calcular* $P(A_1/B)$.



Confeccionamos un árbol con los datos que tenemos.

Ahora podemos calcular las probabilidades de las intersecciones. Ya sabes que:

$$P(A_1 \cap A) = P(A_1) \cdot P(A / A_1) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$$

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$$

$$P(A_2 \cap A) = P(A_2) \cdot P(A / A_2) = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15$$

$$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \cdot P(B / A_2) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35$$

$$P(A_3 \cap A) = P(A_3) \cdot P(A / A_3) = 0.2 \cdot 0.5 = 0.10$$

$$P(A_3 \cap B) = P(A_3) \cdot P(B / A_3) = 0.2 \cdot 0.5 = 0.10$$

Llevamos estos resultados a la tabla de contingencia asociada:

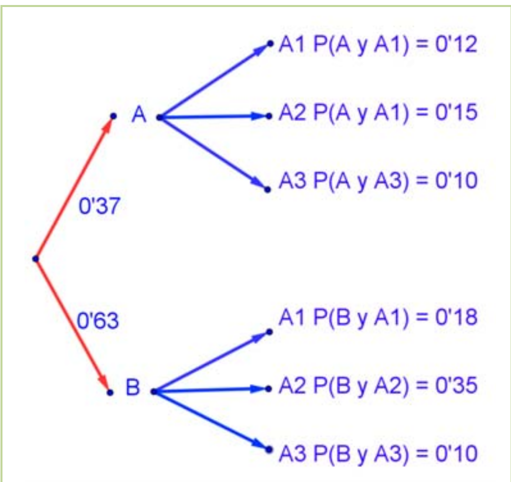
	A_1	A_2	A_2	
A	$P(A_1 \cap A) = 0.12$	$P(A_2 \cap A) = 0.15$	$P(A_3 \cap A) = 0.10$	$P(A) = 0.12+0.15+0.1= 0.37$
B	$P(A_1 \cap B) = 0.18$	$P(A_2 \cap B) = 0.35$	$P(A_3 \cap B) = 0.10$	$P(B)= 0.18+0.35+0.10=0.63$
	$P(A_1) = 0.12 + 0.18 = 0.3$	$P(A_2) = 0.15 + 0.35 = 0.5$	$P(A_3) = 0.10 + 0.10 = 0.2$	1

Sumando columnas comprobamos que no nos estamos equivocando en los cálculos pues las probabilidades que obtenemos: $P(A_1) = 0.12 + 0.18 = 0.3$; $P(A_2) = 0.15 + 0.35 = 0.5$ y $P(A_3) = 0.10 + 0.10 = 0.2$ son las conocidas.

Sumando por filas obtenemos las probabilidades:

$$P(A) = 0.12 + 0.15 + 0.1 = 0.37 \text{ y } P(B) = 0.18 + 0.35 + 0.10 = 0.63.$$

Con estas probabilidades podemos construir el otro árbol.



Ahora ya es posible calcular las otras probabilidades condicionadas, utilizando las probabilidades de la intersección y dividiendo:

$$P(A_1/A) = P(A_1 \cap A) : P(A) = 0.12/0.37 = 12/37$$

$$P(A_2/A) = P(A_2 \cap A) : P(A) = 0.15/0.37 = 15/37$$

$$P(A_3/A) = P(A_3 \cap A) : P(A) = 0.10/0.37 = 10/37$$

$$P(A_1/B) = P(A_1 \cap B) : P(B) = 0.18/0.63 = 18/63$$

$$P(A_2/B) = P(A_2 \cap B) : P(B) = 0.35/0.63 = 35/63$$

$$P(A_3/B) = P(A_3 \cap B) : P(B) = 0.10/0.63 = 10/63$$

La probabilidad pedida $P(A_1/B) = 18/63 = 2/7$.

Observa que:

Vamos a repasar los cálculos, para comprender mejor los teoremas de la probabilidad total y de Bayes.

Si miramos la tabla hemos obtenido $P(B)$ sumando la fila como:

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$

Y las probabilidades de las intersecciones las hemos obtenido multiplicando en el árbol:

$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1)$… luego:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + P(B/A_3) \cdot P(A_3).$$

Teorema de la probabilidad total: $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)$

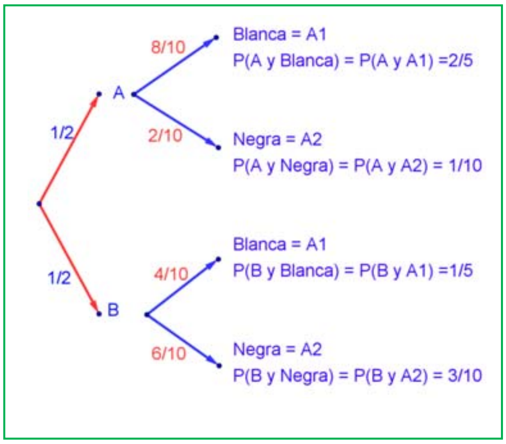
En el segundo árbol hemos obtenido $P(A_1/B)$ dividiendo $P(A_1 \cap B) : P(B)$. Para tener el teorema de Bayes basta sustituir de nuevo la probabilidad de la intersección por el producto, y utilizar el teorema de la probabilidad total:

$$P(A_1/B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$$

Teorema de *Bayes*: $P(A_i/B) = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$

- *Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?*

Debemos calcular $P(\text{Negra}/B)$. Para que se parezca más al enunciado del teorema vamos a llamar a Blanca = A_1 y a Negra = A_2. El conjunto de sucesos $\{A_1, A_2\}$ verifica las condiciones del teorema de *Bayes*. Por tanto queremos calcular $P(A_2/B)$.



Podemos construir el árbol del margen. Por el enunciado conocemos las siguientes probabilidades.

Nos dicen que la elección de urna es al azar, por tanto $P(A) = P(B) = 1/2$.

Si sacamos una bola de la urna A sabemos que $P(\text{Blanca}/A) = P(A_1/A) = 8/10$, pues en la urna A hay 10 bolas de las que 8 son bolas blancas.

Del mismo modo sabemos:

$P(\text{Negra}/A) = P(A_2/A) = 2/10$;

$P(\text{Blanca}/B) = P(A_1/B) = 4/10$, y

$P(\text{Negra}/B) = P(A_2/B) = 6/10$.

Multiplicando calculamos las probabilidades de los sucesos compuestos:

$P(A \cap A_1) = 2/5$,

$P(A \cap A_2) = 1/10$,

$P(B \cap A_1) = 1/5$,

$P(B \cap A_2) = 3/10$.

Estos datos nos permiten construir la tabla de contingencia asociada:

	Blanca = A_1	**Negra = A_2**	
A	$P(A \cap A_1) = 2/5$	$P(A \cap A_2) = 1/10$	$P(A) = 2/5 + 1/10 = 1/2$
B	$P(B \cap A_1) = 1/5$	$P(B \cap A_2) = 3/10$	$P(B) = 1/5 + 3/10 = 1/2$
	$P(A_1) = 2/5 + 1/5 = 3/5$	$P(A_2) = 1/10 + 3/10 = 4/10 = 2/5$	1

Comprueba cómo se verifica el teorema de la probabilidad total:

$P(B) = 1/5 + 3/10 = 1/2 = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2)$

Lo mismo para $P(A)$, $P(\text{Blanca})$ y $P(\text{Negra})$.

Y ahora construimos el otro diagrama de árbol. Conocemos $P(A_1) = 3/5$ y $P(A_2) = 2/5$, además de las probabilidades de las intersecciones, por lo que podemos calcular las probabilidades condicionadas, dividiendo:

Por ejemplo: $P(A/A_1) = P(A \cap A_1)/P(A_1) = (2/5)/(3/5) = 2/3$.

Con lo que tenemos resuelto nuestro problema pues:

$P(B / \text{Negra}) = P(B / A_2) = 3/4$.

Vamos a comprobar que es el mismo resultado (y los mismos cálculos) que hubiéramos obtenido usando la expresión del teorema de *Bayes*:

$$P(B/A_2) = \frac{P(A_2/B)\cdot P(B)}{P(A_2)} = \frac{P(A_2/B)\cdot P(B)}{P(A_2/A)\cdot P(A) + P(A_2/B)\cdot P(B)} = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(A_2 \cap A) + P(A_2 \cap B)} = \frac{3/10}{1/10 + 3/10} = \frac{3}{4}$$

Actividades propuestas

42. En un proceso de fabricación de bombillas se detecta que el 1 % salen defectuosas. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 95 % de las bombillas defectuosas, pero señala como defectuosas un 2 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcta una bombilla que el dispositivo ha calificado como defectuosa. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuosa una bombilla que el dispositivo ha calificado como correcta. *Ayuda*: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.

43. Se tienen 3 cajas, A, B y C. La caja A tiene 20 bolas de las cuales 5 son negras. La caja B tiene 10 bolas con una bola negra. La caja C tiene 15 bolas con 10 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar, y es negra. Calcula la probabilidad de que se haya sacado de la caja C.

44. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 0.4. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 10, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 5. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.

45. Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar:

a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector.

b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

46. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina A sea defectuoso es 0.01, de que lo sea uno fabricado en B es 0.02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0.03 En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C.

a) Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso.

b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B?

47. Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso:

	Pre-benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?
c) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?
d) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

48. En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del colegio A, 70 alumnos del colegio B y 50 alumnos del colegio C. La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio A, el 90 % de los del colegio B y por el 82 % de los del colegio C.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?
(b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio B?

CURIOSIDADES. REVISTA

Galileo

En el siglo XVI planteó el siguiente problema: Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9?

Continuaba la reflexión con las posibles descomposiciones en esas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

En ambos casos hay 6 descomposiciones posibles, sin embargo, tirando muchas veces los 3 dados comprobaba que es más probable sacar un 10.

Si haces un diagrama en árbol comprobarás que todas esas descomposiciones no son igualmente probables.

Por ejemplo: (3, 3, 3) tiene una probabilidad de 1/216, mientras que la suma 6 + 2 + 2, puede salir con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) y (2, 2, 6), luego su probabilidad es 3/216.

El inicio de la Teoría de la Probabilidad, como sabes, fueron los juegos de azar.

Si quieres saber más, busca:

http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdfhttp://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

La ruleta

William Jaggers llegó a Montecarlo con unos pocos francos en el bolsillo y, durante un mes anotó los números que salían en cada ruleta, y en cuatro días ganó dos millones cuatrocientos mil francos. *Jaggers* consiguió quebrar a la banca en *Montecarlo* analizando las frecuencias relativas de cada número de la ruleta y observando que se había desgastado algo del mecanismo de una de ellas, con lo que todos los valores no tenían igual probabilidad. Apostó a los números más probables y ganó.

Caballero de la Meré

Al *Caballero de la Meré* le gustaba jugar y era un gran jugador, por eso sabía que era favorable apostar, al tirar un dado "sacar al menos un 6 en 4 tiradas de un dado" y que no lo era al tirar dos dados el "sacar al menos un 6 doble en 24 jugadas".

Se ve que había jugado mucho para saber que las frecuencias relativas le decían que el primer suceso tenía una probabilidad superior a 0.5, y el segundo la tenía inferior. Pero no lo comprendía. No era matemático y sólo se sabía la regla de tres. ¡Esto no es una proporcionalidad! Dijo 6 : 4 = 36 : 24.

Pero las frecuencias relativas le decían que no era así, por lo que escribió a Pascal para que le solucionara el problema.

Tú ya sabes lo suficiente para solucionárselo. Antes de seguir leyendo, intenta resolverlo.

En lugar de calcular la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas, calcula la probabilidad de *no sacar un 6*, que es su suceso contrario, y es $\left(\frac{5}{6}\right)^4$.

Por tanto la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas es:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177 > 0.5.$$

Calculamos del mismo modo la probabilidad de sacar *al menos un seis doble* al tirar dos dados 24 veces, calculando la de su suceso contrario, la de *no sacar ningún seis doble*: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, por lo que sacar al menos un 6 doble es:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914 < 0.5.$$