

FUNCIONES ELEMENTALES

4.1 – CONCEPTO DE FUNCIÓN

DEFINICIÓN : Una **función real de variable real** es una aplicación de un subconjunto D de R en R tal que a cada valor de la variable “x” le hace corresponder un único valor “y”.

Lo denotamos por : $f : D \rightarrow R$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

“x” es la **variable independiente** e “y” es la **variable dependiente** o **imagen** de x

Si $y = f(x)$, también se dice que $x = f^{-1}(y)$ y se dice que “x” es la **antiimagen** de “y”.

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Al conjunto D se le llama **dominio** de la función y lo representamos por $D(f)$ y es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente “x”

RECORRIDO O IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

Al conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente “y” se le llama **recorrido** o **imagen** de una función y se representa por $\text{Im}(f)$ o $R(f)$

4.2 – DOMINIO DE DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Se llama **Dominio de definición** de una función $f(x)$ y se designa $D(f)$, o simplemente, D, al conjunto de valores de “x” para los cuales existe la función, para los que hay un $f(x)$.

$$D(f) = \{ x \in R / \exists f(x) \} = R - \{ x \in R / \nexists f(x) \}$$

El dominio de una función depende:

- Imposible de realizar alguna operación con ciertos valores de x: denominadores que se anulan, raíces cuadradas de números negativos,....
- Contexto real del que se ha extraído la función : Un pie mide un metro,...
- Por voluntad de quien propone la función: Número menor que 7,...

Cálculo del dominio

- **POLINOMIOS**: El dominio de un polinomio es todo R : $f(x) = P(x)$ $D(f) = R$
- **FUNCIONES RACIONALES**: El dominio de las funciones racionales es todo R menos los puntos donde se anula el denominador:

$$f(x) = g(x) / h(x) \quad D(f) = \{ x \in R / h(x) \neq 0 \} = R - \{ x \in R / h(x) = 0 \}$$

- **FUNCIONES RADICALES**

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \quad \text{Si } n \text{ es impar } D(f) = R$$

$$\text{Si } n \text{ es par } D(f) = \{ x \in R / g(x) \geq 0 \} = R - \{ x \in R / g(x) < 0 \}$$

- **FUNCIONES EXPONENCIALES** : $f(x) = a^{g(x)}$ $D(f) = R$

- **FUNCIONES LOGARÍTMICAS**

$$f(x) = \log_a g(x) \quad D(f) = \{ x \in R / g(x) > 0 \} = R - \{ x \in R / g(x) \leq 0 \}$$

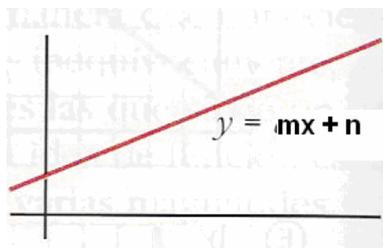
- **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS** :

□ Las funciones seno y coseno \Rightarrow Dominio R

□ El resto (tangente, secante, cosecante, cotangente) \Rightarrow Estudiarlas como racionales

4.3 – FUNCIONES LINEALES : $y = mx + n$

La **función polinómica de primer grado** o **función lineal**: $y = mx + n$, se representa mediante una recta de pendiente m y que pasa por el punto $(0,n)$. La n se llama ordenada en el origen.



Pendiente de una recta es la variación (aumento o disminución) que se produce en la y cuando la x aumenta una unidad. En una ecuación lineal, la pendiente de la recta es el coeficiente de la x cuando se despeja la y .

Si conocemos las coordenadas de dos puntos de la recta: $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ la pendiente se calcula :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\Delta y = \text{Incremento de "y"} \text{ entre } \Delta x = \text{Incremento de "x"})$$

Si de una recta conocemos un punto $P(x_1, y_1)$ y su pendiente m , la ecuación de la recta es:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

Para representarla se dan dos valores cualesquiera a la “ x ” y se calcula el correspondiente valor de la “ y ”.

4.4 – INTERPOLACIÓN Y EXTRAPOLACIÓN LINEAL

Si sabemos que una función es lineal (al menos aproximadamente) y que pasa por dos puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ podemos hallar su valor en cualquier otro punto $x = x_3$

1. Hallamos la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos A y $B \Rightarrow y = mx + n$
2. Sustituimos el valor de x_3 en x y calculamos la y .

Si $x_3 \in (x_1, x_2)$ estamos interpolando.

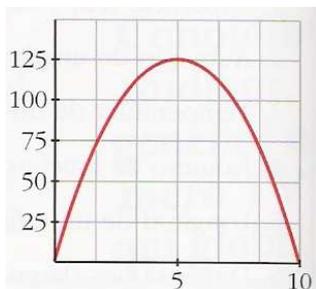
Si $x_3 \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ estamos extrapolando.

En la extrapolación, cuanto más alejado esté x_3 del intervalo (x_1, x_2) , menos fiable es el valor que obtenemos para $f(x_3)$.

4.5 – OTRAS FUNCIONES ELEMENTALES

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Las **funciones polinómicas de segundo grado** o **funciones cuadráticas** : $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, se representan mediante parábolas.

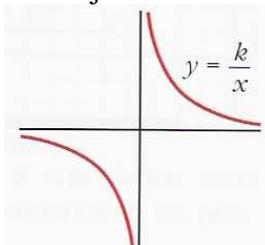


- Tienen ejes paralelos al eje Y
- Las formas de estas parábolas (que sus ramas estén hacia arriba o hacia abajo, que sean más o menos anchas,...) dependen, exclusivamente del valor de a:
 - Si $a > 0$, las ramas van hacia arriba (Cónvexa)
 - Si $a < 0$, las ramas van hacia abajo (Cóncava)
 - Cuando mayor sea $|a|$, más estilizada es la parábola
- La abscisa del vértice de la parábola es : $V_x = -\frac{b}{2a}$

Para representarla se calcula el vértice en la “x” y dos valores más pequeños y dos valores más grandes y se calculan las respectivas “y” de estos valores.

FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Se llaman **funciones de proporcionalidad inversa** a aquellas cuya ecuación es $y = f(x)/g(x)$ y sus gráficas son hipérbolas. Sus asíntotas son los ejes coordenados.



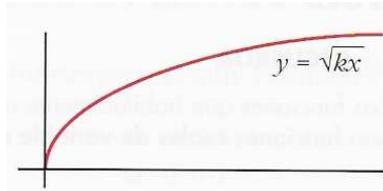
También son hipérbolas las gráficas de las funciones $y = \frac{ax + b}{cx + d}$. Para representarlas se hace previamente la división.

Representación :

- Calcular el dominio
- Hallar una tabla de valores según el dominio
- Dibujarlas teniendo en cuenta las asíntotas.

FUNCIONES RADICALES

Se llaman **funciones radicales** a aquellas cuya ecuación es $y = \sqrt[n]{f(x)}$



Para representarlas:

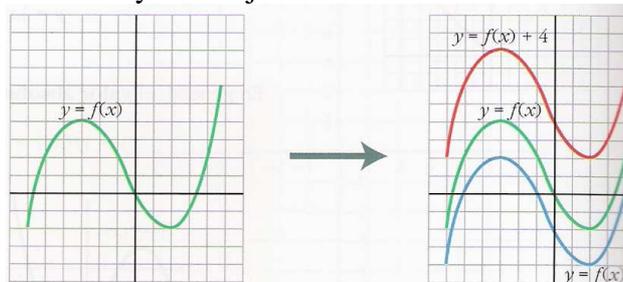
- Calcular el dominio
- Hallar una tabla de valores según el dominio. (Importante: $f(x) = 0$)

4.6 – ALGUNAS TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

REPRESENTACIÓN DE $y = f(x) \pm k$ A PARTIR DE $y = f(x)$

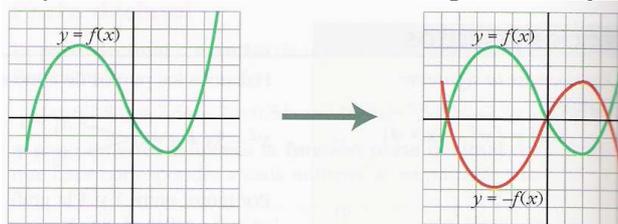
Si sumamos una constante “k” a la “y” \Rightarrow Subimos “k” unidades

Si restamos una constante “k” a la “y” \Rightarrow Bajamos “k” unidades



REPRESENTACIÓN DE $y = -f(x)$ A PARTIR DE $y = f(x)$

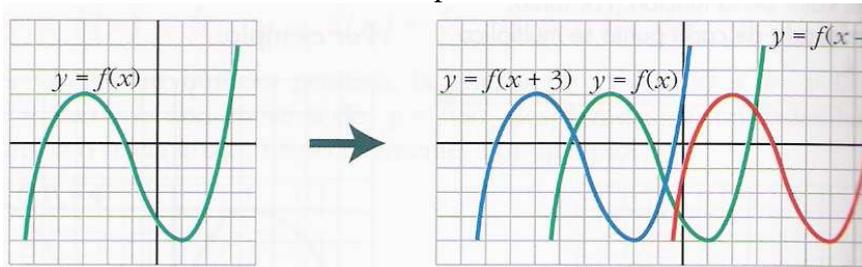
Si cambiamos de signo a la “y” \Rightarrow Hacemos una simetría respecto del eje OX



REPRESENTACIÓN DE $y = f(x \pm k)$ A PARTIR DE $y = f(x)$

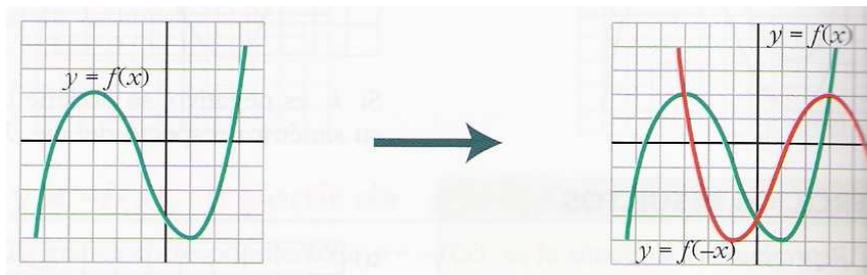
Si sumamos una constante “k” a la “x” \Rightarrow Nos desplazamos “k” unidades hacia la izquierda

Si restamos una constante “k” a la “x” \Rightarrow Nos desplazamos “k” unidades hacia la derecha



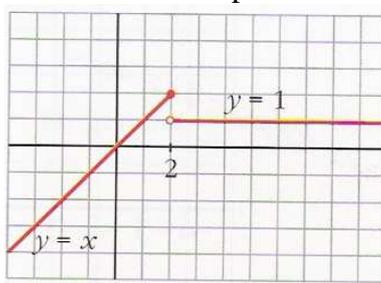
REPRESENTACIÓN DE $y = f(-x)$ A PARTIR DE $y = f(x)$

Si cambiamos de signo a la "x" \Rightarrow Hacemos una simetría respecto del eje OY



4.7 – FUNCIONES DEFINIDAS “A TROZOS”

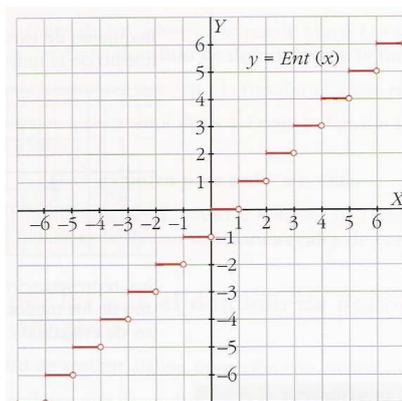
Se calcula su dominio y se hace una tabla de valores para cada trozo.



4.8 – DOS FUNCIONES INTERESANTES

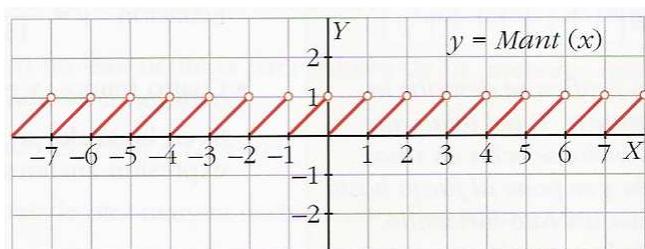
FUNCIÓN PARTE ENTERA

Se llama **parte entera** de un número x al mayor número entero menor o igual a x . A partir de esto, definimos la **función parte entera de x** , $\text{Ent}(x)$, que hace corresponder a cada número x su parte entera.



FUNCIÓN PARTE DECIMAL

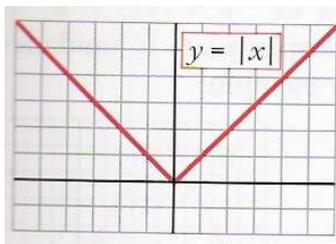
La **parte decimal** o **mantisa** de un número x es $\text{Mant}(x) = x - \text{Ent}(x)$. A partir de esto, definimos la **función parte decimal de x** , $\text{Mant}(x)$ que hace corresponder a cada número x su parte decimal.



4.9 – VALOR ABSOLUTO DE UNA FUNCIÓN

El valor absoluto de un número “x” coincide con “x” si es positivo o nulo, o con su opuesto si es

$$\text{negativo: } |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



El general el valor absoluto de una función se define así: $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$

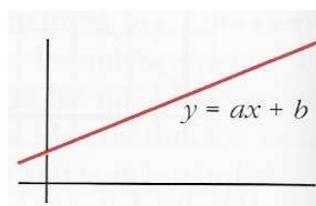
Para representarla se iguala lo de dentro del valor absoluto a cero y se resuelve. Estos puntos nos dividen la función en trozos por tanto podemos tratarla como una función a trozos.

4.10– LAS FUNCIONES DESCRIBEN FENÓMENOS REALES

Las funciones describen fenómenos cotidianos, económicos, psicológicos, científicos,... Tales funciones se obtienen experimentalmente, mediante observación. Después se idealizan y sirven de modelos para las grandes familias de funciones.

FUNCIONES LINEALES

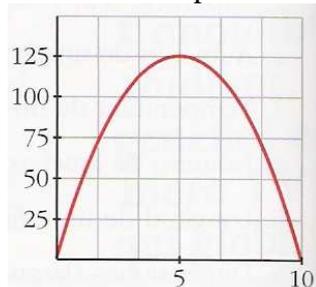
Las funciones lineales se describen con ecuaciones de primer grado, $y = ax + b$, y se representan mediante rectas.



Ejemplos: Presión a distintas altitudes, longitud de un muelle al colgar de distintas masas,...

FUNCIONES CUADRÁTICAS

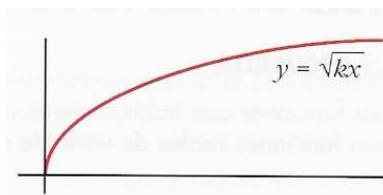
Ecuación: $y = ax^2 + bx + c$. Se representan mediante parábolas.



Ejemplos: Distancia recorrido por un coche desde que pisa el freno hasta que para, altura que alcanza un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba,...

FUNCIONES RADICALES

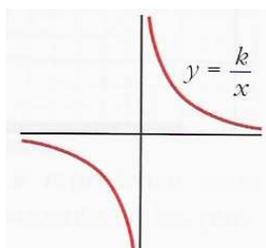
Las funciones $y = \sqrt{kx}$ se representan mediante medias parábolas con el eje paralelo al eje X.



Ejemplos: El periodo de un péndulo T es función de su longitud,...

FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Su expresión analítica es $y = \frac{k}{x}$. Su representación gráfica son hipérbolas con las asíntotas paralelas a los ejes coordenados.



OTROS TIPOS DE FUNCIONES

Funciones exponenciales y logarítmicas (más adelante).

Otras funciones no siguen un modelo fijo. Por ejemplo: El punto de fusión de una aleación depende de las proporciones en que intervienen cada uno de sus componentes.

