

Calculo de forzas, campos, potenciais e enerxía en distribucións de masas

Exercicios da primeira folla de actividades de Gravitación

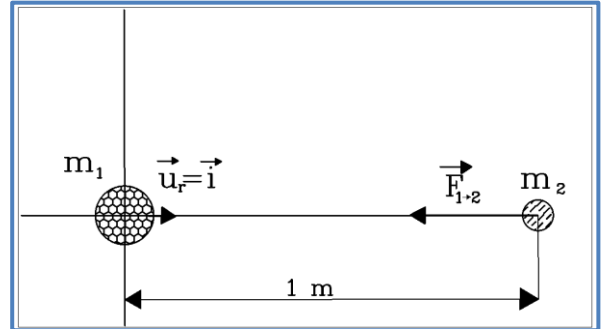
7.- Duas masas de 1 000 e de 10 kg, están separados 1 m en liña reta. Calcula a forza de atracción entre elas, usando calquera dos eixes de coordenadas

Vou usar como referencia o eixe X e polo tanto:

$$\vec{u}_r = \vec{i}$$

Polo tanto a ecuación de Newton pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot \vec{i}$$



Como $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$ podemos substituír polos valores dados:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot \vec{i} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{1000 \text{ kg} \cdot 10 \text{ kg}}{(1 \text{ m})^2} \cdot \vec{i}$$

Agora calculadora. Observa que a unidade resultante é N (Newton).

$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -$	$\vec{i} \text{ (N)}$
---------------------------------	-----------------------

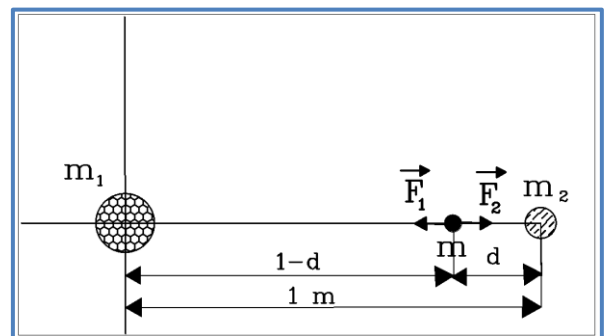
8.- En que punto da reta que une ás dúas masas do exercicio anterior, a forza sobre unha terceira masa, m, é nula?

Sobre o corpo m atúan dúas forzas:

$$\vec{F}_1 = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m}{(1-d)^2} \vec{i} \text{ que é a que exerce } m_1$$

$$\vec{F}_2 = +G \cdot \frac{m_2 \cdot m}{d^2} \vec{i} \text{ que é a que exerce } m_2$$

Para que permaneza en equilibrio os módulos deben ser iguais:



$$F_1 = F_2 \rightarrow G \cdot \frac{m_1 \cdot m}{(1-d)^2} = G \cdot \frac{m_2 \cdot m}{d^2}$$

E agora se simplificamos fica unha expresión como: $\frac{m_1}{(1-d)^2} = \frac{m_2}{d^2}$

E reordenando: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{(1-d)^2}{d^2} \rightarrow 100 = \frac{(1-d)^2}{d^2} \rightarrow 10 = \frac{1-d}{d} \rightarrow$

$$d =$$

9.-Agora a masa de 1 000 kg está situada no punto (1, 2) e a masa de 10 kg no punto (4, 1). Calcula a forza que a primeira masa exerce sobre a menor se a escala está en metros.

$$m_1 = 1000 \text{ kg} , \vec{r}_1 = (+1, +2) = \vec{i} + 2\vec{j} \text{ (m)}$$

$$m_2 = 10 \text{ kg} , \vec{r}_2 = (+4, +1) = 4\vec{i} + \vec{j} \text{ (m)}$$

Calculemos o vector \vec{r} :

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (+4, +1) - (+1, +2) = (+3, -1)$$

Ou sexa que : $\vec{r} = 3\vec{i} - \vec{j} \text{ (m)}$

Calculemos o seu módulo: $|\vec{r}| = r = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \text{ (m)} = d$

E agora calculamos o vector unitario: $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(+3, -1)}{\sqrt{10}} = \frac{+3\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{10}}$

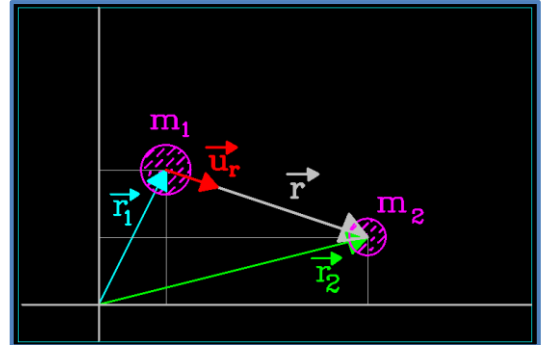
Calculemos agora a forza gravitatoria coa ecuación de Newton:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot \vec{u}_r$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1000 \cdot 10}{(\sqrt{10})^2} \cdot \frac{(+3\vec{i} - \vec{j})}{\sqrt{10}} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -2,11 \cdot 10^{-8} \cdot (+3\vec{i} - \vec{j}) \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -6,33 \cdot 10^{-8} \vec{i} + 2,11 \cdot 10^{-8} \vec{j} \text{ (N)}$$



Observa que podíamos ter usado a ecuación de Newton deste outro xeito:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot \vec{u}_r$$

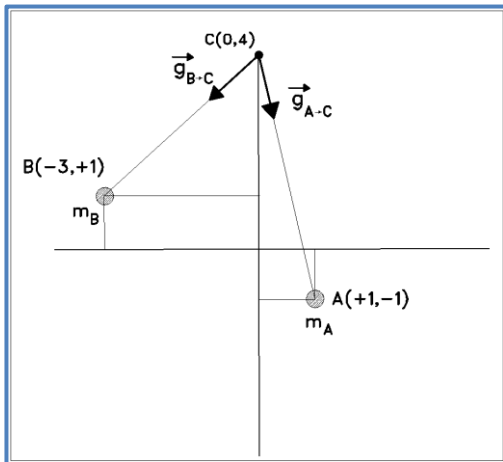
E como $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ ou tamén $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{d}$ pois $r = d$:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^3} \cdot \vec{r} = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1000 \cdot 10}{(\sqrt{10})^3} \cdot (+3\vec{i} - \vec{j}) =$$

Remata.

13.-Duas masas de 1 000 kg estan situadas nos puntos A(1, -1) e B(-3, 1) coa escala en metros. Calcula o campo gravitatorio no punto C(0, 4).

Comecemos por facer un debuxo que sexa claro e permita o calculo vectorial.



Para calcular o campo gravitatorio en C teremos que sumar os campos que crean A e B alí, é dicir:

$$\vec{g}_C = \vec{g}_{B \rightarrow C} + \vec{g}_{A \rightarrow C} \quad (1)$$

Imos calcular en primeiro lugar o campo que crea A en C:

$$\vec{g}_{A \rightarrow C} = -\frac{G \cdot m_A}{d_{A \rightarrow C}^2} \vec{u}_{A \rightarrow C}$$

Ou mellor:

$$\vec{g}_{A \rightarrow C} = -\frac{G \cdot m_A}{d_{A \rightarrow C}^3} \vec{r}_{A \rightarrow C} \quad (2)$$

Calculamos o vector $\vec{r}_{A \rightarrow C} = (0, +4) - (1, -1) = (-1, +5) = -\vec{i} + 5\vec{j}$ (m)

E imos calcular o seu módulo que é a distancia $d_{A \rightarrow C}$:

$$d_{A \rightarrow C} = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26} \text{ (m)}$$

Agora xa podemos calcular de acordo coa ecuación (2):

$$\vec{g}_{A \rightarrow C} = -\frac{G \cdot m_A}{d_{A \rightarrow C}^3} \vec{r}_{A \rightarrow C} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1000}{(\sqrt{26})^3} \cdot (-\vec{i} + 5\vec{j}) \left(\frac{N}{kg}\right)$$

$$\vec{g}_{A \rightarrow C} = +5,03 \cdot 10^{-10} \vec{i} - 2,52 \cdot 10^{-9} \vec{j} \quad \left(\frac{N}{kg}\right) \quad (3)$$

Agora temos que calcular o campo gravitatorio que crea B en C.

$$\vec{g}_{B \rightarrow C} = -\frac{G \cdot m_B}{d_{B \rightarrow C}^3} \vec{r}_{B \rightarrow C} \quad (4)$$

Calculamos o vector $\vec{r}_{B \rightarrow C} = (0, +4) - (-3, +1) = (+3, +3) = +3\vec{i} + 3\vec{j}$ (m)

E calculamos o seu módulo que é a distancia $d_{B \rightarrow C}$:

$$d_{B \rightarrow C} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ (m)}$$

E agora xa podemos calcular coa ecuación (4):

$$\vec{g}_{B \rightarrow C} = -\frac{G \cdot m_B}{d_{B \rightarrow C}^3} \vec{r}_{B \rightarrow C} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1000}{(3\sqrt{2})^3} \cdot (+3\vec{i} + 3\vec{j}) \left(\frac{N}{kg}\right)$$

$$\vec{g}_{B \rightarrow C} = -2,62 \cdot 10^{-9} \vec{i} - 2,62 \cdot 10^{-9} \vec{j} \left(\frac{N}{kg}\right) \quad (5)$$

E agora para calcular o campo total en C só temos que introducir os valores calculados na expresión (1) e sumar componentes:

$$\vec{g}_C = \vec{g}_{A \rightarrow C} + \vec{g}_{B \rightarrow C} = (+5,03 \cdot 10^{-10} \vec{i} - 2,52 \cdot 10^{-9} \vec{j}) + (-2,62 \cdot 10^{-9} \vec{i} - 2,62 \cdot 10^{-9} \vec{j})$$

$$\vec{g}_C = -2,21 \cdot 10^{-9} \vec{i} - 5,14 \cdot 10^{-9} \vec{j} \left(\frac{N}{kg}\right)$$

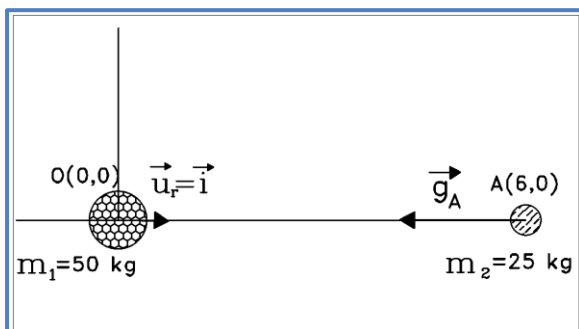
Comproba todos os resultados. Se algo non cadra avisa e revisámolo na clase.

Tes máis exercicios do mesmo tipo na folla número 1.

14.- Dúas masas de 50 e 25 kg situadas respectivamente en (0, 0) e (6, 0) coa escala en metros. Calcula:

- O campo gravitatorio que a primeira masa crea en (6, 0).
- A forza que masa de 50 kg exerce sobre a menor.
- A enerxía potencial do sistema cando as masas están en ditas posicións.
- A enerxía potencial do sistema cando trasladamos a segunda masa ao punto (12, 0). Cal é o traballo realizado? Realiza ese traballo o campo ou é unha forza exterior?

a) Para calcular o campo gravitatorio que crea a masa de 50 kg no punto A(6,0)



teremos que aplicar a ecuación que define o campo gravitatorio creado por unha masa:

$$\vec{g} = -\frac{G \cdot M}{d^2} \vec{u}_r$$

No noso caso temos que ter en conta que o eixe de referencia é X e o sentido será

negativo como indica a figura:

$$\vec{g}_A = -\frac{G \cdot m_1}{d^2} \vec{i}$$

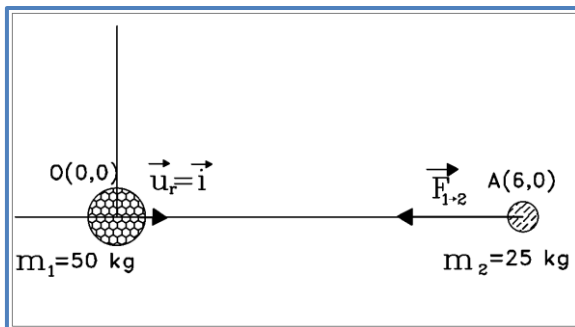
$$\vec{g}_A = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 50}{6^2} \vec{i} \left(\frac{N}{kg} \right) = -9,26 \cdot 10^{-11} \vec{i} \left(\frac{N}{kg} \right)$$

b) Para calcular a forza que a masa maior exerce sobre a menor poderíamos recorrer á ecuación de Newton:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot \vec{u}_r$$

Mais non é preciso por canto nos xa coñecemos o valor do campo gravitatorio, é dicer:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot \vec{u}_r$$



En suma, nos xa coñecemos o resultado dos termos escritos en vermello. En fin, como xa vimos na teoría:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \cdot \vec{g}_A = 25kg \cdot \left(-9,26 \cdot 10^{-11} \vec{i} \left(\frac{N}{kg} \right) \right) = -2,315 \cdot 10^{-9} \vec{i} \text{ (N)}$$

c) Para calcular a enerxía potencial do sistema cando a primeira masa está en O(0,0) e a segunda está en A(6,0) pois aplicamos a ecuación de definición da enerxía potencial:

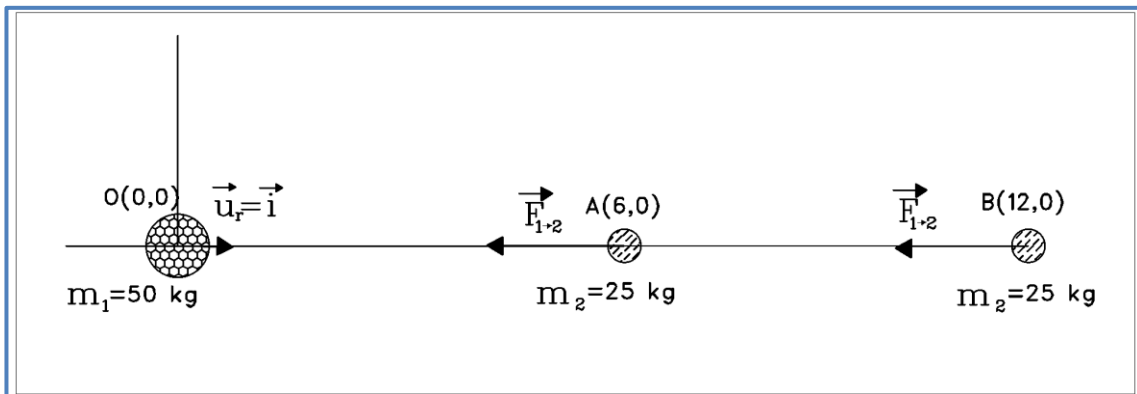
$$Ep = -\frac{G \cdot M \cdot m}{d}$$

No noso caso:

$$Ep_A = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{d} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 50kg \cdot 25kg}{6 m} = -1,39 \cdot 10^{-8} J$$

d) Se a masa menor se despraza ao punto B(12,0) calcular a enerxía potencial é o mesmo mais coa diferenza de que agora a distancia será 12 m:

$$Ep_B = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{d} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 50kg \cdot 25kg}{12 m} = -6,95 \cdot 10^{-9} J$$



Que aconteceu coa enerxía potencial?

Pois calculemos avariación da enerxía potencial:

$$\Delta E p_A^B = E p_B - E p_A = -6,95 \cdot 10^{-9} \text{ J} - (-1,39 \cdot 10^{-8} \text{ J}) = +6,95 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

Ou sexa que a enerxía potencial aumenta.

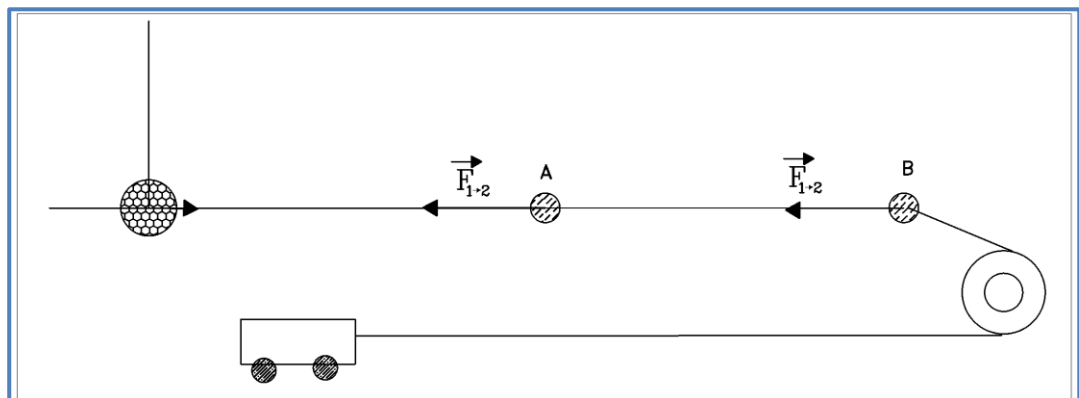
E que acontece co traballo?

$$W_A^B = -\Delta E p_A^B = -6,95 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

O traballo é negativo. **Observa que compre realizar traballo pois o desprazamento realizou-se contra as forzas do campo.** Observa a figura con atención e verás que para trasladar a masa menor de A ate B temos que vencer as forzas de atracción do campo gravitatorio.

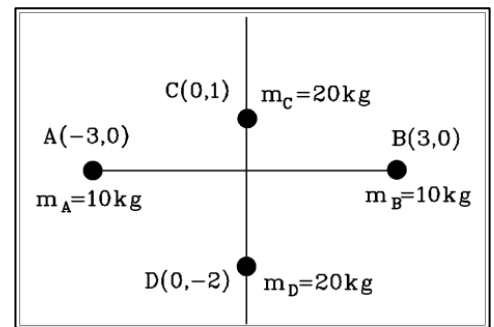
Resulta evidente, máis podes comproba-lo, que cando o proceso sexa contrario, é dicir, cando traslademos a masa menor dende B ate A, a variación de enerxía potencial será negativa (perdemos enerxía potencial) e o traballo é positivo (realiza o traballo a forza atrativa do campo gravitatorio)

Agora podes xogar un pouquiño con aquel carro cargado de alunado de 1º de ESO ao que divertíamos grazas a unha polea e unha masa. Recordas?



15.- Determina o campo e o potencial gravitatorios, na orixe de coordenadas do sistema de masas da figura.

Vou comezar polo máis fácil: calcular o valor do potencial gravitatorio no centro de coordenadas, é dicer no punto (0,0):



$$V_{(0,0)} = V_A + V_B + V_C + V_D \quad (1)$$

Para calcular o potencial gravitatorio preciso aplicar a ecuación de definición:

$$V = -\frac{G \cdot m}{d}$$

As unidades van ser J/kg.

$$V_A = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{3} \left(\frac{J}{kg}\right) = -2,22 \cdot 10^{-10} \left(\frac{J}{kg}\right)$$

$$V_B = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{3} \left(\frac{J}{kg}\right) = -2,22 \cdot 10^{-10} \left(\frac{J}{kg}\right)$$

$$V_C = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 20}{1} \left(\frac{J}{kg}\right) = -1,33 \cdot 10^{-9} \left(\frac{J}{kg}\right)$$

$$V_D = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 20}{2} \left(\frac{J}{kg}\right) = -6,67 \cdot 10^{-10} \left(\frac{J}{kg}\right)$$

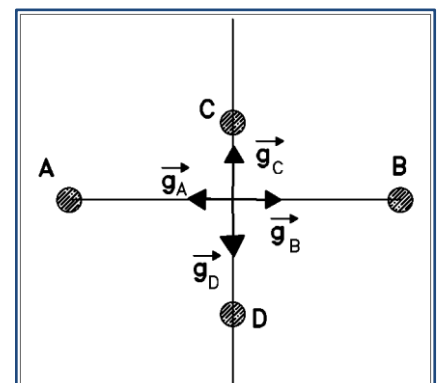
Agora para calcular o potencial tota só compre sumar:

$$V_{(0,0)} =$$

Imos calcular o campo gravitatorio. Para elo preciso un debuxo un pouco máis claro.

Temos que calcular o campo gravitatorio no punto (0,0):

$$\vec{g}_{(0,0)} = \vec{g}_A + \vec{g}_B + \vec{g}_C + \vec{g}_D$$



Observa que as masas en A e B son iguais e estan á mesma distancia, polo tanto

$$\vec{g}_A + \vec{g}_B = 0$$

Así que o calculo fica reducido á suma vetorial dos campos gravitatorios provocados polas masas C e D.

Así que a calcular:

$$\vec{g} = -\frac{G \cdot m}{d^2} \vec{u}_r$$

Aplicado a C:

$$\vec{g}_C = +\frac{G \cdot m_C}{d^2} \vec{j} = +\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 20}{1^2} \vec{j} \left(\frac{N}{kg}\right) = +1,334 \cdot 10^{-9} \vec{j} \left(\frac{N}{kg}\right)$$

Aplicado a D:

$$\vec{g}_D = -\frac{G \cdot m_D}{d^2} \vec{j} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 20}{2^2} \vec{j} \left(\frac{N}{kg}\right) = -3,335 \cdot 10^{-10} \vec{j} \left(\frac{N}{kg}\right)$$

E polo tanto o campo:

$$\vec{g}_{(0,0)} = +1,334 \cdot 10^{-9} \vec{j} - 3,335 \cdot 10^{-10} \vec{j} = +1,005 \cdot 10^{-9} \vec{j} \left(\frac{N}{kg}\right)$$

16.- Calcula a forza que atúa sobre unha masa de 5 kg situada na orixe de coordenadas do sistema, e a súa enerxía potencial.

Calcula o traballo preciso para trasladar a masa de 5 kg dende o punto (0, 0) ata o infinito.

Para calcular a forza:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}_{(0,0)} = 5 \text{ kg} \cdot 1,005 \cdot 10^{-9} \vec{j} \left(\frac{N}{kg}\right) = 5,0025 \cdot 10^{-9} \vec{j} (N)$$

Para a enerxía potencial:

$$Ep = m \cdot V_{(0,0)} =$$

Para o traballo para trasladar a masa dende (0,0) ate o infinito:

$$W_{(0,0)}^{\infty} = -\Delta E p_{(0,0)}^{\infty} = -(E p_{\infty} - E p_{(0,0)}) = -(0 - E p_{(0,0)}) =$$

O traballo ten que ser negativo pois realízase contra as forzas do campo.

Exercicios da segunda folla de actividades de Gravitación

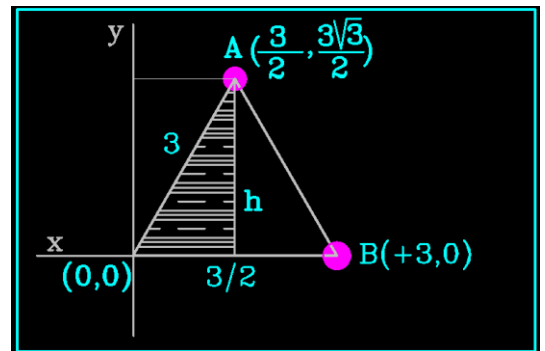
Xuño 2004.-En dous dos tres vertices dun triángulo equilátero de 3 m de lado , estan situadas duas masa de 50 g . Calcula:

- a) a intensidade do campo gravitatorio no outro vertice.
- b) o potencial gravitatorio no outro vertice , e o traballo necesario para trasladar unha terceira masa de 25 g dende o infinito ata ese punto. O traballo é a favor ou contra das forzas do campo?(Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{Kg}^2$)

Vou situar o punto (0,0) no vertice que fica livre de masas.

Agora determino as coordenadas dos outro puntos.

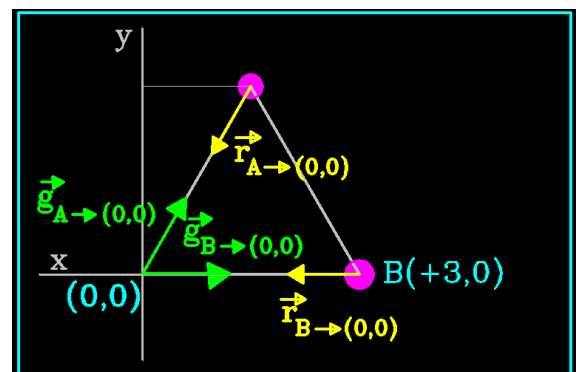
É ben fácil para B, máis non o é tanto para o punto A. Observade que para este punto a coordenada en X é 1,5 m ou 3/2. Para calcular a coordenada en Y compre resolver o triángulo que está raiado e que ten como hipotenusa 3 m e como cateto menor 3/2 m. Compre calcular o outro cateto, o que denominei h:



$$h^2 = 3^2 - (3/2)^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4} \rightarrow h = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (m)}$$

E xa temos as coordenadas de cada punto.

Agora imos a polo apartado a) que di que temos que calcular o campo gravitatorio no terceiro vértice , que é o punto (0,0). O campo gravitatorio será a suma vetorial dos campos creados por A e B.



$$\vec{g}_{(0,0)} = \vec{g}_{(A \rightarrow (0,0))} + \vec{g}_{(B \rightarrow (0,0))}$$

Calculamos o campo que crea B en (0,0) que é máis fácil.

$$\vec{g}_{(B \rightarrow (0,0))} = -G \cdot \frac{m_B}{r_{(B \rightarrow (0,0))}^3} \cdot \vec{r}_{(B \rightarrow (0,0))}$$

Calculemos o vector : $\vec{r}_{(B \rightarrow (0,0))} = (0,0) - (3,0) = -3\vec{i}$ e polo tanto o seu módulo é $r_{(B \rightarrow (0,0))} = 3 \text{ m}$

E agora imos ao calculo do campo creado por B.

Olloiii Non esquezas que a masa é de 50 g e temo-la que expresar en unidades do S.Iiiii

$m_B = 0,05 \text{ kg}$

Agora imos ao calculo. Programo a miña calculadora para que traballe en notación científica e con dous decimais:

$$\vec{g}_{(B \rightarrow (0,0))} = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0,05}{3^3} \cdot (-3\vec{i}) \text{ (N/kg)} = +3,71 \cdot 10^{-13} \cdot \vec{i} \text{ (N/kg)}$$

*Calculamos o campo que crea A en (0,0):

$$\vec{g}_{(A \rightarrow (0,0))} = -G \cdot \frac{m_A}{r_{(A \rightarrow (0,0))}^3} \cdot \vec{r}_{(A \rightarrow (0,0))}$$

Calculemos o vector : $\vec{r}_{(A \rightarrow (0,0))} = (0,0) - \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{3}{2}\vec{i} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\vec{j}$

O seu módulo será $r_{(B \rightarrow (0,0))} = 3 \text{ m}$

Seguimos tendo en conta que

$m_A = 0,05 \text{ kg}$

$$\vec{g}_{(A \rightarrow (0,0))} = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0,05}{3^3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\vec{i} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\vec{j} \right) \text{ (N/kg)}$$

$$\vec{g}_{(A \rightarrow (0,0))} = 1,85 \cdot 10^{-13} \cdot \vec{i} + 3,21 \cdot 10^{-13} \cdot \vec{j} \text{ (N/kg)}$$

E agora podemos calcular o campo gravitatorio total sumando os dous resultados:

$\vec{g}_{(0,0)} = 5,56 \cdot 10^{-13}\vec{i} + 3,21 \cdot 10^{-13}\vec{j} \text{ (N/kg)}$
--

Comproba o calculo (se cadra equivoqueime)

b) Imos calcular o potencial gravitatorio no vértice que está livre.

Observa que as dúas masas son iguais (0,05 kg) e as distancias tamén (3 m)

$$V_{(0,0)} = V_{A \rightarrow (0,0)} + V_{B \rightarrow (0,0)} = -G \cdot \frac{m_A}{r_{A \rightarrow (0,0)}} - G \cdot \frac{m_B}{r_{B \rightarrow (0,0)}}$$

De acordo coa observación anterior, basta con calcular un dos valores e multiplicar por 2:

$$V_{(0,0)} = -2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0,05}{3} \text{ (J/kg)} = -2,22 \cdot 10^{-12} \text{ (J/kg)}$$

Agora calculemos o traballo necesario para trasladar unha masa de 25 g, é dicir, 0,025 kg dende ese vértice ate o infinito.

$$W_{(0,0)}^{\infty} = -\Delta E p_{(0,0)}^{\infty} = -m' \cdot (V_{\infty} - V_{(0,0)}) = -0,025 \cdot (0 - (-2,22 \cdot 10^{-12})) \text{ (J)}$$

$$W_{(0,0)}^{\infty} = -5,55 \cdot 10^{-14} \text{ (J)}$$

Observa que se trasladamos **dende o vértice ate o infinito o traballo resulta negativo** porque imos a aumentar a enerxía potencial. Neste caso o traballo será contra as forzas do campo.

Se trasladamos a masa **dende o infinito ate ese vértice, o traballo terá o mesmo valor máis agora será positivo** pois será realizado polas forzas do campo:

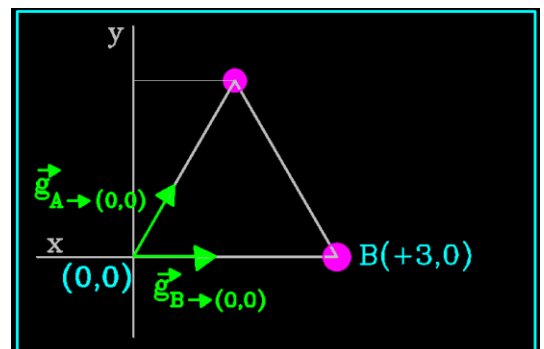
$$W_{\infty}^{(0,0)} = +5,55 \cdot 10^{-14} \text{ (J)}$$

Como ves o máis complicado é o calculo da intensidade do campo gravitatorio.

Hai un xeito de calculo distinto que pode facilitar o traballo.

Observa o debuxo e verás os dous vectores correspondentes aos dous campos gravitatorios que tes que calcular.

O calculo de $\vec{g}_{(B \rightarrow (0,0))}$ non ten maior problema.



A súa dirección e sentido veñen definidos, como se ve no debuxo, polo vector unitario \vec{i} .
Polo tanto:

$$\vec{g}_{(B \rightarrow (0,0))} = +G \cdot \frac{m_B}{r_{(B \rightarrow (0,0))}^2} \cdot \vec{i}$$

Como ves escribo directamente o unitario correspondente: $+\vec{i}$ na expresión está escrito con vermello.

O resto é introducir os datos e o cálculo dará o resultado.

$$\vec{g}_{(B \rightarrow (0,0))} = +6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0,05}{3^2} \cdot \vec{i} \text{ (N/kg)} = +3,71 \cdot 10^{-13} \vec{i} \text{ (N/kg)}$$

O cálculo de $\vec{g}_{(A \rightarrow (0,0))}$ é un pouco máis complicado. Observa que este vector forma un ángulo de 60° co eixe das X (os ángulos dun triángulo equilátero son de 60°)

Podemos calcular o seu módulo:

$$g_{(A \rightarrow (0,0))} = G \cdot \frac{m_A}{r_{A \rightarrow (0,0)}^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0,05}{3^2} = 3,71 \cdot 10^{-13} \text{ (N/kg)}$$

Este vector ten dúas componentes.

1.-Componente en X: obtén-se multiplicando o módulo anterior polo coseno de 60° e incorporando o unitario $+\vec{i}$

$$\vec{g}_x = +3,71 \cdot 10^{-13} \cdot \cos 60^\circ \vec{i} = \mathbf{1,85 \cdot 10^{-13} \cdot \vec{i}}$$

2.-Componente en Y: obtén-se multiplicando o módulo calculado polo seno de 60° e incorporando o unitario $+\vec{j}$

$$\vec{g}_y = +3,71 \cdot 10^{-13} \cdot \sin 60^\circ \vec{j} = \mathbf{3,21 \cdot 10^{-13} \cdot \vec{j}}$$

E agora só tes que sumar as componentes para obter o resultado final.

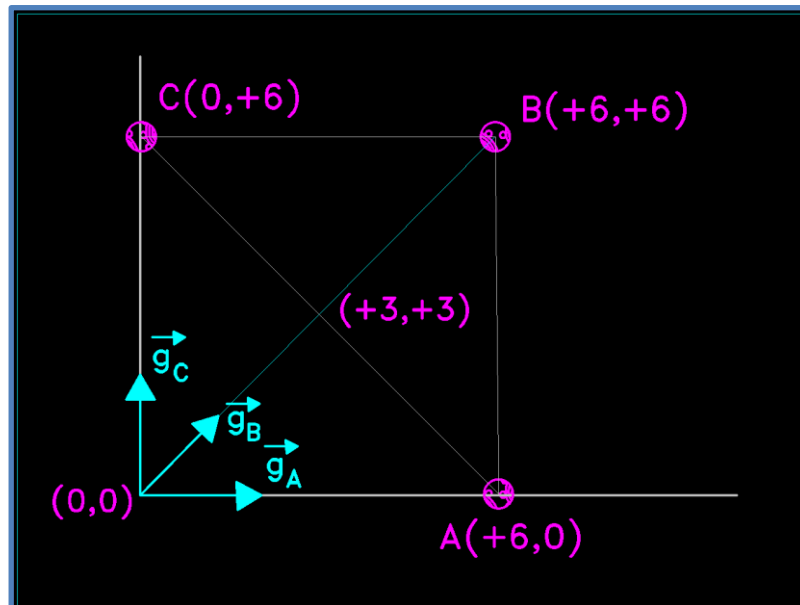
Este que ven agora, é un exercicio do tipo dos que sempre estan non exames de campo gravitatorio.

Tres masas de 300 kg cada unha, estan situadas nos puntos A (6,0), B (6,6) e C (0,6) coa escala en metros. Calcula:

- a) O campo gravitatorio no punto (0,0).
- b) O potencial gravitatorio nos puntos (0,0) e (3,3).
- c) O traballo necesario para trasladar unha terceira masa de 3 kg dende o punto (0,0) ate o punto (3,3).

(Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$)

Comecemos por facer un esquema da disposición das masas sobre un sistema de referencia:



$$m_A = m_B = m_C = 300 \text{ kg}$$

A(+6,0) , B(+6, +6), C(0, +6)

a) Iremos calcular o campo gravitatorio no punto (0,0)

$$\vec{g}_{(0,0)} = \vec{g}_A + \vec{g}_B + \vec{g}_C$$

Resulta evidente que os campos creados por A e C teñen o mesmo módulo (a mesma masa e a mesma distancia). Un está dirixido en sentido positivo do eixe X e o outro en sentido positivo do eixa Y. Polo tanto:

$$\vec{g}_A = + \frac{G \cdot m_A}{r_A^2} \vec{i} = +5,56 \cdot 10^{-10} \vec{i} \left(\frac{\text{N}}{\text{kg}} \right)$$

E para C:

$$\vec{g}_C = + \frac{G \cdot m_A}{r_A^2} i = +5,56 \cdot 10^{-10} \vec{j} \left(\frac{N}{kg} \right)$$

E agora compre calcular o campo creado por B.

Calculamos primeiro o vetor:

$$\vec{r}_{B \rightarrow (0,0)} = (0,0) - (+6,+6) = (-6,-6)$$

E agora o seu módulo:

$$r_{B \rightarrow (0,0)} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\vec{g}_B = - \frac{G \cdot m_B}{r_{B \rightarrow (0,0)}^3} \cdot (-6\vec{i} - 6\vec{j}) = 1,96 \cdot 10^{-10} \vec{i} + 1,96 \cdot 10^{-10} \vec{j} \left(\frac{N}{kg} \right)$$

E agora sumamos os resultados:

$$\vec{g}_{(0,0)} = 7,52 \cdot 10^{-10} \vec{i} + 7,52 \cdot 10^{-10} \vec{j} \left(\frac{N}{kg} \right)$$

b) Imos calcular o potencial no punto (0,0):

$$V_{(0,0)} = V_A + V_B + V_C$$

$$V_{(0,0)} = - \frac{G \cdot m_A}{r_A} - \frac{G \cdot m_B}{r_B} - \frac{G \cdot m_C}{r_C}$$

$$V_{(0,0)} = \left(- \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 300}{6} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 300}{6\sqrt{2}} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 300}{6} \right) \text{ J/kg}$$

$$V_{(0,0)} = -9,02 \cdot 10^{-9} \text{ J/kg}$$

E agora calculamos o potencial no punto (3,3).

Atentos e atentas!!!! A distancia entre cada punto A,B e C ate o punto (3,3) é a metade de $6\sqrt{2}$ ou sexa $3\sqrt{2}$.

$$V_{(3,3)} = V_A + V_B + V_C$$

Como a distancia é sempre a mesma e as masas son identicas podemos simplificar o calculo:

$$V_{(3,3)} = 3 \cdot \left(-\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 300}{3\sqrt{2}} \right) \text{ J/kg}$$

$$V_{(3,3)} = -1,41 \cdot 10^{-8} \text{ J/kg}$$

c) Iremos calcular o trabalho para levar unha masa de 3 kg dende (0,0) ate (3,3):

$$W_{(0,0)}^{(3,3)} = -\Delta E_p_{(0,0)}^{(3,3)} = -m' \cdot \Delta V_{(0,0)}^{(3,3)} = -3 \cdot [-1,41 \cdot 10^{-8} - (-9,08 \cdot 10^{-9})] \text{ J}$$

$$W_{(0,0)}^{(3,3)} = +1,52 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

Que quere dicir que sexa positivo? Será a favor ou en contra das forzas do campo?