Exercicios de astros e satélites

Exercicios selecionados da primeira folla de atividades

3.- A distancia Terra-Lúa é 60 veces o raio da Terra, e completa a súa órbita en 27 días aproximadamente. Calcula a masa da Terra.
(Datos: Raio da Terra: 6370 km, G= 6,67.10^{-11}N.m^{2}.kg^{-2})

Vou comezar lembrando a 3ª lei de Kepler e a sua relación coa expresión de Newton.

Como a forza gravitatoria entre o Sol e a Terra é:

$$F_g = \frac{G \cdot M_{Terra} \cdot m_{Lúa}}{R^2_{Terra-Lúa}} \quad (1)$$

Por outra banda a forza provoca unha aceleración normal e polo tanto podemos escreber que;

$$F_g = m_{Lúa} \cdot a_{normal} = \frac{m_{Lúa} \cdot v_o^2}{R_{Terra-Lúa}} \quad (2)$$

Podemos igualar as duas ecuacións e obter:

$$\frac{G \cdot M_{Terra} \cdot m_{Lúa}}{R^2_{Terra-Lúa}} = \frac{m_{Lúa} \cdot v_o^2}{R_{Terra-Lúa}}$$

Podemos simplificar e obter:

$$\frac{G \cdot M_{Terra}}{R_{Terra-Lúa}} = v_o^2 \quad (3)$$

Agora vou facer uso da definición de velocidade orbital:

$$v_o = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{Terra-Lúa}}{T_{órbita\ da\ Lúa}} \quad (4)$$

Esta expresión haina que elevar ao cadrado e obtemos:

$$v_o^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^2_{Terra-Lúa}}{T^2_{órbita\ da\ Lúa}} \quad (5)$$

Podemos igualar as ecuacións (3) e (5):

$$\frac{G \cdot M_{Terra}}{R_{Terra-Lúa}} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^2_{Terra-Lúa}}{T^2_{órbita\ da\ Lúa}}$$

Agora vou reordenar todo e obtemos:

$$\boldsymbol{\frac{G \cdot M_{Terra}}{4 \cdot \pi^2} = \frac{R^3_{Terra-Lúa}}{T^2_{órbita\ da\ Lúa}}}$$

Esta expresión final ten á dereita a 3ª Lei de Kepler e á esquerda unha constante na que aparece a masa da Terra.

Calcula-a:

4.- Calcula a masa do Sol cos datos da órbita terrestre.

(Datos: Raio da órbita da Terra: 1,496.10^{9} km, Periodo orbital da Terra: 365 días, G= 6,67.10^{-11}N.m^{2}.kg^{-2})

A que agora podes aplicar o proceso anterior ao sistema Sol-Terra?

Seguro que chegas a unha expresión como:

$$\frac{G \cdot M_{Sol}}{4 \cdot \pi^2} = \frac{R^3_{Terra-Sol}}{T^2_{orbita\,da\,Terra}}$$

E agora so tes que aplicar a expresión anterior para calcular a masa do Sol.

5.-Completa a seguinte táboa de datos orbitais de satélites de Xúpiter.

Nome	Raio orbital meio (km)	Período orbital (días)
Metis		0,295
Amaltea		0,498
Tebe		0,675
Ío	421 600	1,769138
Europa		3,551181
Ganímedes		7,154553
Calisto		16,68902

Trata-se de aplicar a 3ª Lei de Kepler apoiandonos en que coñecemos os datos que corresponden a Ío. Por exempro con Metis:

$$\frac{T^2_{\acute{I}O}}{R^3_{\acute{o}rbita\ de\ \acute{I}O}} = \frac{T^2_{Metis}}{R^3_{\acute{o}rbita\ de\ Metis}} \rightarrow \frac{1{,}769138^2}{421600^3} = \frac{0{,}295^2}{R^3_{\acute{o}rbita\ de\ Metis}}$$

$$R_{\acute{o}rbita\ de\ Metis} = 127724{,}47\ km$$

Pois veña, a polos outros.

<u>**Eu vou mecanizar o calculo obtendo unha expresión a partir do anterior**</u>:

$$\frac{T^2_{\text{ÍO}}}{R^3_{\text{órbita de ÍO}}} = \frac{T^2_{satélite\ X}}{R^3_{órbita\ satélite\ X}} \rightarrow \frac{1{,}769138^2}{421600^3} = \frac{T^2_{satélite\ X}}{R^3_{órbita\ satélite\ X}}$$

E de aquí podemos obter:

$$R^3_{órbita\ satélite\ X} = 421600^3 \cdot \frac{T^2_{satélite\ X}}{1{,}769138^2}$$

E tamén:

$$\boldsymbol{R_{órbita\ satélite\ X} = 421600 \cdot \sqrt[3]{\frac{T^2_{satélite\ X}}{1{,}769138^2}}}$$

Veña, non te queixes que caseque vai en automático. So tes que ir introducindo os cadrados dos periodos dos satélites, e obterás o raio das suas órbitas.

A min dan-me os resultados da tabela seguinte que está feita coa folla de calculo:

Satélite	Periodo orbital (días)	Raio orbital (km)
Metis	0,295	127724,4787
Amaltea	0,498	181083,5598
Tebe	0,675	221783,199
Europa	3,551181	670874,576
Ganímedes	7,154553	1070157,744
Calisto	16,68902	1882261,756

6.- Facendo uso da folla de calculo, representa graficamente T^2 fronte a R^3 dos valores da táboa anterior e encontra o valor da pendente e da masa de Xúpiter.

Pois vou preparar unha folla de calculo completa, e tendo en conta a expresión da 3ª Lei de Kepler para cualquer satélite de Xúpiter:

$$\boldsymbol{\frac{G \cdot M_{Xúpiter}}{4 \cdot \pi^2} = \frac{R^3_{satélite}}{T^2_{órbita\ do\ satélite}}}$$

Observa que se representamos a expresión do seguinte xeito:

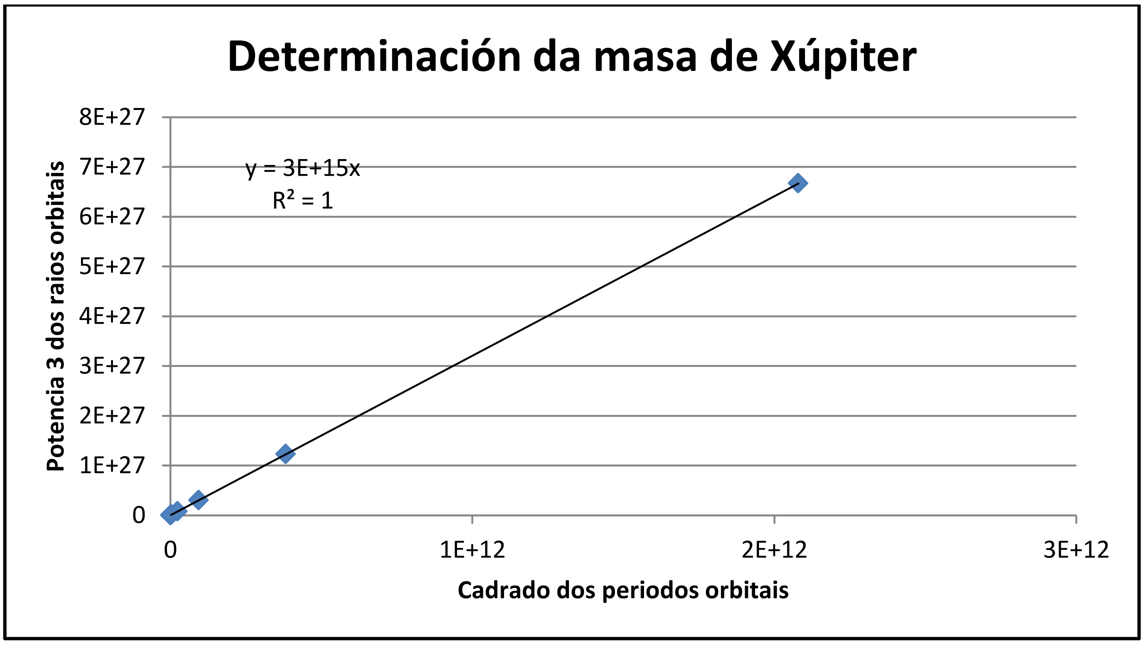
$$\boldsymbol{R^3_{satélite} = \left(\frac{G \cdot M_{Xúpiter}}{4 \cdot \pi^2}\right) \cdot T^2_{órbita\ do\ satélite}}$$

Se representamos $\boldsymbol{R^3_{satélite}}$ frente a $\boldsymbol{T^2_{órbita\ do\ satélite}}$ obteremos unha liña reta que terá como pendente $\boldsymbol{\frac{G \cdot M_{Xúpiter}}{4 \cdot \pi^2}}$, temos que ter en conta que teremos que representar as variabeis en unidades do sistema internacional.

A continuación a tabela que construín:

Satélite	T_O (días)	T_O (s)	R_O (km)	R_O (m)	T^2 (s^2)	R^3 (m^3)	Pendente
Metis	0,295	25488	127724,4787	127724478,7	649638144	2,08364E+24	3,20738E+15
Amaltea	0,498	43027,2	181083,5598	181083559,8	1851339940	5,93796E+24	3,20738E+15
Tebe	0,675	58320	221783,199	221783199	3401222400	1,0909E+25	3,20738E+15
Europa	3,551181	306822,0384	670874,576	670874576	9,414E+10	3,01942E+26	3,20738E+15
Ganímedes	7,154553	618153,3792	1070157,744	1070157744	3,8211E+11	1,22558E+27	3,20738E+15
Calisto	16,68902	1441931,328	1882261,756	1882261756	2,0792E+12	6,66868E+27	3,20738E+15
Ío	1,769138	152853,5232	421600	421600000	2,3364E+10	7,49379E+25	3,20738E+15
						Valor medio	3,20738E+15

Ademai obtiven o seguinte gráfico:



Como ves o valor da pendente está arredor de 3.10^{15} ou $3{,}2.10^{15}$, un é o valor da gráfica e outro é o valor medio. Eu farei uso do valor medio.

Pois agora a calcular a masa de Xúpiter:

$$\frac{G \cdot M_{Xúpiter}}{4 \cdot \pi^2} = 3{,}2 \cdot 10^{15} \rightarrow \boldsymbol{M_{Xúpiter} = 1{,}894 \cdot 10^{27}\ kg}$$

Busca o dato e compara o resultado.

17.- Supon a existencia dun planeta perfetamente esférico que ten un raio metade do terrestre e a mesma densidade. Calcula:
a) A aceleración da gravedade na superficie de dito planeta.
b)A velocidade de escape dun obxecto dende a superficie de dito planeta.
(Datos: g_0 Terra= 9,81 N.kg-1 , velocidade de escape na Terra=11,2 km.s^{-1})

a) Para calcular a gravedade na superficie do planeta deberemos facer uso de:

$$\boldsymbol{g_0} = \frac{\boldsymbol{G \cdot M_{Planeta}}}{\boldsymbol{R^2_{Planeta}}} \quad (1)$$

Non temos como datos nin a masa nin o raio da Terra, así que tentaremos expresar todo en función da gravedade terrestre que si é un dato coñecido.

$$\boldsymbol{R_{Planeta}} = \frac{\boldsymbol{R_{Terra}}}{\boldsymbol{2}} \quad (\boldsymbol{2})$$

Ademais hai unha relación de densidades pois son iguais:

$$d_{Terra} = d_{Planeta}$$

$$\frac{M_{Terra}}{V_{Terra}} = \frac{M_{Planeta}}{V_{Planeta}}$$

$$\frac{M_{Terra}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3_{Terra}} = \frac{M_{Planeta}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3_{Planeta}}$$

E simplificando:

$$\frac{M_{Terra}}{R^3_{Terra}} = \frac{M_{Planeta}}{R^3_{Planeta}}$$

Ademais o raio do planeta é a metade do terrestre, asi que:

$$\frac{M_{Terra}}{R^3_{Terra}} = \frac{M_{Planeta}}{\frac{R^3_{Terra}}{2^3}} \rightarrow M_{Terra} = 8 \cdot M_{Planeta} \rightarrow \boldsymbol{M_{Planeta}} = \frac{\boldsymbol{M_{Terra}}}{\boldsymbol{8}} \quad (\boldsymbol{3})$$

E agora vou facer uso de (2) e (3) na ecuación (1):

$$g_0 = \frac{G \cdot \frac{\boldsymbol{M_{Terra}}}{\boldsymbol{8}}}{(\frac{\boldsymbol{R_{Terra}}}{\boldsymbol{2}})^2} = \frac{G \cdot \frac{M_{Terra}}{8}}{\frac{R^2_{Terra}}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_{Terra}}{R^2_{Terra}} = \frac{1}{2} \cdot g_{0\,da\,Terra} = \boldsymbol{4,905}\ (\frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{kg}})$$

Resolto o apartado a)

Imos lembrar o da velocidade de escape para o caso da Terra.

Lembra que é a velocidade que compre para conseguir que un coprpo escape da atración do campo gravitatorio terrestre.

A enerxía de saída será a suma da enerxía potencial e cinética:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_e^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} \quad (1)$$

E “no infinito” a enerxía potencial ten valor cero. Supoñamos que ademais nese intre a velocidade é cero, e enton resulta que a enerxía mecánica final é cero. Polo tanto podemos igualar a expresión (1) a cero:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_e^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = 0$$

Así que:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_e^2 = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$$

Simplificamos e despexamos a velocidade de escape:

$$v_{e\ Terra} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}} \quad (2)$$

Para o planeta sería:

$$v_{e\ Planeta} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_P}{R_P}}$$

E agora facemos a mesma sustitución de antes, expresando-a coas expresións (2) e (3):

$$v_{e\ Planeta} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot \frac{M_{Terra}}{8}}{\frac{R_{Terra}}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{Terra}}{R_{Terra}}} = \frac{1}{2} \cdot v_{e\ da\ Terra} = \mathbf{5,6\ km \cdot s^{-1}}$$

Veña. Repasa paso a paso.

19.- Un satélite artificial xira arredor da Terra a 3,6.10^7 m da súa superficie. Calcula:
a) A velocidade e a aceleración do satélite.
b) O período de rotación do satélite arredor da Terra expresado en días.
(Datos: Raio da Terra:6370 km, Masa da Terra: 5,98.10^{24} kg)

Comecemos polo principio. O satélite está en órbita circular arredor da Terra, polo tanto a forza gravitatoria:

$$F = \frac{G \cdot M_{Terra} \cdot m}{(R_T + h)^2}$$

Ademais esa forza proporcionará aceleración normal e polo tanto:

$$F = m \cdot a_n = \frac{m \cdot v_o^2}{(R_T + h)}$$

Podemos igualar e obtemos que:

$$\frac{G \cdot M_{Terra} \cdot m}{(R_T + h)^2} = \frac{m \cdot v_o^2}{(R_T + h)}$$

E agora simplificamos e xa podes calcular a velocidade na órbita.

$$v_o^2 = \frac{G \cdot M_{Terra}}{(R_T + h)} \rightarrow v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Terra}}{(R_T + h)}} =$$

E agora calcula a aceleración normal tendo en conta que:

$$a_n = \frac{v_o^2}{(R_T + h)} =$$

Para calcular o periodo orbital tes que considerar que:

$$v_o = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_o}{T_o} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{T_o} \rightarrow T_o =$$

Veña, so tes que completar os calculos.

20.- Un satélite de 350 kg atópa-se nunha órbita circular de 15 000 km de raio arredor da Terra. Calcula:
a) O peso do satélite na órbita.
b) O seu período de rotación arredor da Terra.
c) A enerxía total do satélite nesa órbita.
(Datos: R_{Terra} =6370 km, g_0 Terra= 9,81 $N.kg^{-1}$)

a) O peso do satélite na órbita non é outra cousa que a forza de atración que a Terra exerce sobre el. Así que facendo uso da ecuación de Newton:

$$F_{T\to s} = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r_o^2} = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{(R_T + h)^2} \quad (1)$$

Non podemos seguir. Non temos o dato da masa da Terra, poren coñecemos o valor da gravedade terrestre na superficie do planeta e polo tanto podemos recorrrer a:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \to G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2 \quad (2)$$

E agora podemos sustituír en (1) e obtemos:

$$F_{T\to s} = \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_s}{(R_T + h)^2} = \frac{9{,}81 \cdot (6370000)^2 \cdot 350}{(6370000 + 15000000)^2}\ (N) = 305{,}075\ N$$

b) Voulle dar algunha volta para repasar.

O satélite está sometido á forza da gravedade:

$$F_{T\to s} = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r_o^2} = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{(R_T + h)^2}$$

A forza da gravedade xéra a aceleración normal:

$$F_{T\to s} = m \cdot a_n = \frac{m_s \cdot v_o^2}{(R_T + h)}$$

Podemos igualar:

$$\frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{(R_T + h)^2} = \frac{m_s \cdot v_o^2}{(R_T + h)}$$

Simplificamos e igualamos:

$$\frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)} = v_o^2$$

Agora podemos voltar a facer a sustitución da expresión (2): $G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$

E polo tanto obtemos:

$$v_o^2 = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{(R_T + h)}$$

E podemos calcular a velocidade orbital:

$$v_o = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{(R_T + h)}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 6370000^2}{6370000 + 15000000}} = 4315{,}90\ m/s$$

E agora, como:

$$v_o = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_o}{T_o} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{T_o} \rightarrow T_o = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{v_o} = 31110{,}93\ s$$

Ou sexa, 8 horas 38 minutos e 30,93 segundos.

c) Como xa vimos en teoría, a enerxía mecánica total na órbita, é a metade da enerxía potencial. Así que:

$$E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r_o}$$

Outra volta temos que facer a sustitución $G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$ e ademais $r_o = R_T + h$:

$$E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_s}{R_T + h} = \qquad\qquad\qquad J$$

21.- A estación espacial internacional (ISS) describe unha órbita arredor da Terra a unha altura de 390 km sobre a superficie. A súa masa é de 415 000 kg. Calcula:

a) A velocidade na órbita e o período de rotación.

b) A enerxía total na órbita.

c) O peso dun astronauta de 75 kg de masa dentro da ISS. Porque está sometido a ingravidez?

d) A enerxía que foi precisa para levar a ISS dende a superficie da Terra ate a súa órbita.

e) A enerxía necesaria se queremos trasladar a ISS a outra órbita que estivera a unha altura dupla da atual. Cal sería o período de rotación nesa nova órbita?

(Datos: G=6,67.10^{-11}N.m^2.kg^{-2}, Masa da Terra: 5,98.10^{24} kg, Raio da Terra: 6 370 km)

a) Pois imos aló.

Como xa sabes, podemos igualar: $F_c = F_G \rightarrow \; m_s \cdot \frac{v_0^2}{r_o} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{r_0^2}$

E se simplificas e tal pois sae que: $v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_o}}$

$$r_o = (6370 + 390)km = 6760\; km = 6{,}76 \cdot 10^6 m$$

E resulta que a velocidade orbital é 7681 m/s

b) A enerxía total na órbita é a enerxía mecánica (suma da potencial e da cinética) a mitade da enerxía potencial: $E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_{Terra} \cdot m_s}{r_o} = -1{,}22.\, 10^{13} J$

c)O peso do astronauta non é máis que o resultado da expresión de Newton aplicada á Terra e ao astronauta. Vou calcular o valor da gravedade e logo multiplico pola masa do astronauta, que é o mesmo:

$$Peso\; do\; astronauta = G \cdot \frac{M_T}{r_0^2} \cdot m_{astronauta} = 8{,}73\; \left({}^{N}\!/_{kg}\right) \cdot 75kg \cong 655\; N$$

E como ves, a intensidade do campo gravitatorio a esa altitude é $\mathbf{8,73}\; \left({}^{\boldsymbol{N}}\!/_{\boldsymbol{kg}}\right)$

Este valor vai coincidir co valor da aceleración centrípeta, como xa discutimos na aula. Precisamente por iso viven na ingravidez. Comprobemos:

$$a_c = \frac{v_o^2}{r_o} = \frac{7681^2}{6{,}76 \cdot 10^6} \left({}^{m}\!/_{s^2}\right) \cong \mathbf{8,73}\; \left({}^{\boldsymbol{N}}\!/_{\boldsymbol{kg}}\right)$$

d) Fagamos un balance de enerxías.

Na superficie da Terra e antes do lanzamento, toda a enerxía era potencial:

$$Ep_{Terra} = -\frac{G \cdot M_{Terra} \cdot m_{satélite}}{R_{Terra}} = -2{,}598 \cdot 10^{13} J$$

Pois ben, antes calculamos a enerxía mecánica na órbita.

A enerxía necesaria será a enerxía final (na órbita) menos a enerxía inicial (a enerxía potencial na superficie da Terra):

$$\boldsymbol{Enerxía\ necesaria} = \boldsymbol{W_{exterior}} = \boldsymbol{E_{\ M.orbita}} - \boldsymbol{E_{\ P.na\ Terra}} =$$

$$= -1{,}22 \cdot 10^{13} J - (-2{,}598 \cdot 10^{13} J) = +\mathbf{1{,}378 \cdot 10^{13} J}$$

Poderías calcular a velocidade de lanzamento?

Si. Supoñamos que o lanzamento é vertical. Pois está claro:

$$E_{cinética} = \frac{1}{2} \cdot m_{satétile} \cdot v_{lanzamento}^2$$

E podes obter sen dificultade que a velocidade de lanzamento debe ser aproximadamente **8150 m/s** (se non me trabuquei no calculo)

e) Imos lanzar a ISS a outra órbita na que a altura será dupla: 390 $km \cdot 2 = 780\ km$

Polo tanto a nova órbita ten un raio de : $r_o = (6370 + 780) km = 7150\ km = 7{,}15 \cdot 10^6 m$

Agora calculamos a enerxía mecánica nesa nova órbita:

$$E_{M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m_S}{r_o} = -1{,}16 \cdot 10^{13}\ J}$$

A enerxía necesaria será a enerxía final, a da segunda órbita, menos a enerxía inicial, a da primeira órbita:

$$\boldsymbol{Enerxía\ necesaria} = \boldsymbol{W_{exterior}} = \boldsymbol{E_{\ M.orbita\ 2}} - \boldsymbol{E_{\ M.orbita\ 1}} =$$

$$= -1{,}16 \cdot 10^{13} J - (-1{,}22 \cdot 10^{13} J) = +\mathbf{6{,}245 \cdot 10^{11} J}$$

Non o dí o exercicio mais como antes podemos calcular a velocidade necesaria para lanzar á nova órbita a ISS. Xa sabedes, coa ecuación da enerxía cinética:

$$E_{cinética} = \frac{1}{2} \cdot m_{satélile} \cdot v_{lanzamento}^2$$

E resulta que a velocidade necesaria será: **1735 m/s**

Exercicios de astros e satélites da folla de atividades 2

Exercicio setembro 2015

Un satélite artificial de 500 kg de masa xira nunha órbita circular a 5000 km de altura sobre a superficie da Terra. Calcula:
a) a súa velocidade orbital;
b) a súa enerxía mecánica na órbita;
c) a enerxía que hai que comunicarlle para que, partindo da órbita, chegue ó infinito.
(Datos: RTerra = 6370 km; g_0 = 9,8 m·s^{-2})

Comezamos deducindo a ecuación da velocidade orbital que sae de:

$$F_c = F_G \rightarrow m_s \cdot \frac{v_0^2}{r_o} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{r_0^2}$$

De onde: $v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_o}}$ (1)

Comecemos polo raio da órbita:

$$r_o = (6370 + 5000)\text{km} = 11370\text{ km} = 11{,}37 \cdot 10^6\text{m}$$

Temos que ter en conta que non contamos cos datos que precisa a expresión: non temos nin a masa da Terra nin o valor da constante G. Agora ben, temos o valor da gravedade na superficie da Terra e o raio da Terra e polo tanto:

$$g_{Terra} = \frac{G \cdot M_{Terra}}{R_{Terra}^2} \rightarrow G \cdot M_{Terra} = g_{Terra} \cdot R_{Terra}^2 \quad (2)$$

Agora podemos sustituír na ecuación (1) e :

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_o}} = \sqrt{\frac{g_{Terra} \cdot R_{Terra}^2}{r_o}} = 5{,}91.\,10^3\text{m/s}$$

Podemos calcular o período orbita (xa sei que non o pregunta pero xa postos.....):

$$v_o = \frac{2\pi r_o}{T_o} \rightarrow T_o = \frac{2\pi r_o}{v_o} =$$

b) Para calcular a enerxía mecánica na órbita teremos que calcular a enerxía mecánica que xa sabemos que é a metade da enerxía potencial:

$$E_{M=-\frac{1}{2}\cdot\frac{G \cdot M_T \cdot m_S}{r_O}}$$

Nesa expresión teremos que voltar a completar a mesma sustitución da expresión (2):

$$\mathrm{E_{M.órbita}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{G\cdot M_{Terra}\cdot m_s}}{\mathrm{r_o}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{g_{Terra}\cdot R_{Terra}^2 m_s}}{\mathrm{r_o}} = -8{,}74\cdot 10^9\mathrm{J}$$

c) Imos agora a calcular a enerxía precisa para enviar o satélite “ao infinito”. Aló, nese “lugar” a enerxìa potencial gravitatoria é cero (0) e aceitamos que vai chegar con velocidade cero (0) e polo tanto a súa enerxía mecánica no “infinito” será cero (0).

$$E_{mecánica\ final} = 0\ J$$

A enerxía mecánica no momento do lanzamento será a enerxía mecánica na órbita ao que debemos sumar o traballo exterior:

$$E_{mecánica\ inicial} = E_{mecánica\ na\ órbita} + W_{Exterior}$$

E como:

$$E_{mecánica\ final} = E_{mecánica\ inicial}$$

Enton:

$$0\ J = E_{mecánica\ na\ órbita} + W_{Exterior}$$

E polo tanto:

$$W_{Exterior} = -E_{mecánica\ na\ órbita} = +8{,}74\cdot 10^9\mathrm{J}$$

Exercicio setembro 2013

Deséxa-se poñer un satélite de masa 10^3 kg en órbita arredor da Terra e a unha altura dúas veces o raio terrestre. Calcular:
a) a enerxía que hai que comunicarlle desde a superficie da Terra;
b) a forza centrípeta necesaria para que describa a órbita;
c) o período do satélite en dita órbita.
(Datos R_{Terra} = 6370 km; g_0 = 9,8 m·s^{-2})

a) Queremos que se sitúe nunha órbita a unha altura (h) dupla do raio terrestre. Calculemos xa o raio da órbita:

$$r_{órbita} = R_{Terra} + h = R_{Terra} + 2 \cdot R_{Terra} = 3 \cdot R_{Terra} = 19{,}2 \cdot 10^6\ (m)$$

Calculemos agora a enerxía na órbita:

$$E_{órbita} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r_{órbita}}$$

Debemos ter en conta que non contamos nin coa masa da Terra nin coa constante de gravitación universal, mais temos o valor da gravidade na superficie do planeta e polo tanto:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow g_0 \cdot R_T^2 = G \cdot M_T$$

E podemos enton sustituír na anterior obtendo:

$$E_{órbita} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_s}{r_{órbita}}$$

E como o raio da órbita é tres veces o raio terrestre:

$$E_{órbita} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_s}{3 \cdot R_T} = -\frac{g_0 \cdot R_T \cdot m_s}{6} = -1{,}04.\,10^{10}\ J$$

A enerxía no momento do lanzamento será a suma da enerxía potencial na superficie da Terra e o traballo exterior (enerxía cinética). Ou sexa:

$$E_{Terra} = Ep_{Terra} + W_{Exterior} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T} + W_{Exterior}$$

E igualando:

$$E_{órbita} = E_{Terra}$$

$$-1{,}04.\,10^{10}\,J = -\frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T} + W_{Exterior}$$

$$-1{,}04.\,10^{10}\,J = -6{,}26 \cdot 10^{10}\,J + W_{Exterior}$$

$$\mathbf{W_{Exterior} = +5{,}22 \cdot 10^{10}\ \ J}$$

b)Para calcular a forza centrípeta debemos ter en conta que na órbita:

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c$$

Polo tanto podemos calcular a forza centrípeta:

- Coa ecuación de definición: $F_c = \frac{m_s \cdot v_0^2}{r_0}$
- Coa ecuación de Newton: $F_g = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r_o^2}$

Como non coñecemos a velocidade orbital, resultaría máis fácil seguir a segunda vía. Agora ben, á vista do apartado c) imos ter que calcular en todo caso a velocidade orbital.

Usando a ecuación de Newton:

$$F_g = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r_o^2} = 1092\ N$$

c) Vale, agora non hai saída compre calcular a velocidade orbital e logo calcular o período.

Faino:

Eu vou facer uso da 3ª Lei de Kepler que a estas alturas seguro sabes deducir. Polo tanto vou calcular o período sen calcular a velocidade orbital.

$$\frac{r_{órbita}^3}{T_{órbita}^2} = \frac{G \cdot M_{Terra}}{4 \cdot \pi^2}$$

Teño que repetir a sustitución

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow g_0 \cdot R_T^2 = G \cdot M_T$$

E polo tanto obtemos

$$\frac{r_{órbita}^3}{T_{órbita}^2} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{4 \cdot \pi^2}$$

E o valor do período resulta $2{,}6 \cdot 10^4\ s = 7\ h\ 13\ \text{min}\ 20\ s$

Repasa as operacións.

Veña, un problemiña así como un presente, un agasallo:

Un satélite de 150 kg de masa, descrebe órbitas circulares arredor da Terra cun período de 120 minutos. Calcula:
a) A altura a que se topa sobre a superficie da Terra.
b) A súa enerxía mecánica.
c) A enerxía que foi precisa para enviar o satélite dende a superficie da Terra ate esa órbita.
(Datos: raio da Terra: 6.370 Km,gravedade na superficie da Terra: 9,8 N/kg)

Satélite de masa:150 kg e con período orbital de 120 min=7 200 s

$$F_c = F_g$$

$$m_s \cdot \frac{v_o^2}{r_o} = \frac{G \cdot M_{Terra} \cdot m_s}{r_o^2} \rightarrow v_o^2 = \frac{G \cdot M_{Terra}}{r_o} \quad (1)$$

Ademais:

$$v_o = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_o}{T_o} \rightarrow v_o^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_o^2}{T_o^2} \quad (2)$$

E igualando as expresións (1) e (2):

$$\frac{G \cdot M_{Terra}}{r_o} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_o^2}{T_o^2}$$

E obtemos a Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{r_o^3}{T_o^2} = \frac{G \cdot M_{Terra}}{4 \cdot \pi^2} \quad (3)$$

Na expresión anterior poderíamos calcular o raio da órbita máis non temos os datos da masa da terra nin da constante de gravitación universal. Porén contamos co valor da gravedade na superficie da Terra e o raio do planeta e polo tanto podemos:

$$g_{Terra} = \frac{G \cdot M_{Terra}}{R_{Terra}^2} \rightarrow G \cdot M_{Terra} = g_{Terra} \cdot R_{Terra}^2 \quad (4)$$

E se agora sustituímos na ecuación (3) podemos obter unha expresión definitiva para o calculo do raio da órbita:

$$\frac{r_o^3}{T_o^2} = \frac{g_{Terra} \cdot R_{Terra}^2}{4 \cdot \pi^2}$$

E podes obter o raio orbital que da como resultado $8{,}05 \cdot 10^6 m$ e polo tanto

$$\mathrm{h} = 1{,}68 \cdot 10^6 \mathrm{m} = 1680 \mathrm{~km}$$

b) Calculemos a enerxía mecánica na órbita:

$$E_{M.órbita} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_{Terra} \cdot m_s}{r_o} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_{Terra} \cdot R_{Terra}^2 m_s}{r_o} = -3{,}7 \cdot 10^{-9} \mathrm{J}$$

c)Para lanzar o satélite á órbita dende a superficie da Terra, debemos realizar un traballo exterior que sumado á enerxía potencial gravitatoria na superficie da Terra debe ser quen de igualar á enerxía mecánica na órbita:

$$W_{exterior} + E_{P.Terra} = E_{M.órbita} \quad (5)$$

A enerxía potencial na superficie da Terra será:

$$E_{P.Terra} = -\frac{G \cdot M_{Terra} \cdot m_s}{R_{Terra}} = -\frac{g_{Terra} \cdot R_{Terra}^2 \cdot m_s}{R_{Terra}} = -g_{Terra} \cdot R_{Terra} \cdot m_s = -9{,}36 \cdot 10^9 \mathrm{J}$$

E agora con (5) podes calcular o **traballo exterior** que debe dar positivo (é enerxía cinética) e obtés como resultado $+5{,}66 \cdot 10^9 J$

Poderías calcular a velocidade de lanzamento pois tes a masa do satélite e:

$$W_{exterior} = E_{cinética} = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_{lanzamento}^2$$

Setembro 2014.- Ceres é o planeta anano máis pequeno do sistema solar e ten un período orbital arredor del Sol de 4,60 anos, unha masa de 9,43·10^{20} kg e un raio de 477 km. Calcular:
a) o valor da intensidade do campo gravitatorio que Ceres crea na súa superficie;
b) a enerxía mínima que debe ter unha nave espacial de 1.000 kg de masa para que, saíndo da superficie, poida escapar totalmente da atracción gravitatoria do planeta;
c) a distancia media entre Ceres e o Sol, tendo en conta que a distancia media entre a Terra e o Sol é de 1,50·10^{11} m e que o período orbital da Terra arredor do Sol é dun ano.
(G = 6,67·10^{-11} N. m^2. Kg^{-2}) Solucións: a) g= 0,276 N/kg , b) 1,32.10^8 J, c) 4,15.10^{11} m

a) Para calcular o valor do campo gravitatorio de Ceres na súa superficie:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_{Ceres}}{R_{Ceres}^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 9{,}43 \cdot 10^{20}}{477000^2} \left(\frac{N}{kg}\right) = \mathbf{0,276} \left(\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{kg}}\right) \mathbf{ou\ m/s^2}$$

b) Na superficie de Ceres a nave só posúe enerxía potencial. A esa enerxía hai que sumar o traballo exterior (enerxía cinética) que sexa precisa para enviar á nave ao "infinito". No infinito a enerxía potencial é cero (0) e a enerxía cinética aceitamos que tamén, e polo tanto a enerxía mecánica no ponto final é cero (0)

$$E_{Mecánica\ inicial} = W_{exterior} + Ep_{superficie} = W_{ext} - \frac{G \cdot M_{Ceres} \cdot m_{nave}}{R_{Ceres}}$$

$$E_{Mecánica\ final} = 0$$

E como: $$E_{Mecánica\ inicial} = E_{Mecánica\ final}$$

$$W_{ext} - \frac{G \cdot M_{Ceres} \cdot m_{nave}}{R_{Ceres}} = 0 \rightarrow W_{Ext} = +\frac{G \cdot M_{Ceres} \cdot m_{nave}}{R_{Ceres}} = \mathbf{+1,32 \cdot 10^8\ J}$$

c) Ceres e a Terra xiran arredor do Sol en órbitas relacionadas pola Terceira Lei de Kepler. Polo tanto imos facer uso de tal lei máis vou usar Unidades astronómicas e anos como unidades.

$$\frac{R_{orbital\ Terra}^3}{T_{orbital\ Terra}^2} = \frac{R_{orbital\ Ceres}^3}{T_{orbital\ Ceres}^2} \rightarrow 1 = \frac{R_{orbital\ Ceres}^3}{4{,}6^2} \rightarrow R_{orbital\ Ceres} = \mathbf{2,76\ U.A}$$

Que expresado en metros: $\mathbf{4,15 \cdot 10^{11}\ m}$

Setembro 2016.- Un satélite artificial de masa 10^2 kg vira arredor da Terra a unha altura de $4 \cdot 10^3$ km sobre a superficie terrestre.Calcula:
a) a súa velocidade orbital, aceleración e período, suposta a órbita circular;
b) acha o módulo do momento angular do satélite respecto do centro da Terra;
c) enuncia as leis de Kepler .
(Datos: RTerra = 6370 km; g_0 = 9,8 m·s^{-2})
Solucións: a) $6{,}2.10^3$ m/s, 3,7 m/s^2 , $1{,}05.10^4$ s b) $6{,}43.10^{12}$ kg.m^2.s^{-1}

a) Como xa sabemos, na órbita estan igualadas a forza gravitatoria e a forza centrípeta así que:

$$F_g = F_c$$

$$\frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r_o^2} = \frac{m_s \cdot v_o^2}{r_o}$$

Como non temos nin a masa da Terra nin o valor de G, teremos que facer uso da sustitución pola gravedade terrestre na superficie e o raio da terra:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_o}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot (6370000)^2}{(6370000 + 4000000)}} = 6192{,}46 \frac{m}{s} \cong 6{,}2 \cdot 10^3 m/s$$

Para calcular a aceleración podemos facer uso da aceleración centrípeta ou normal, ou tamén facer uso do valor da gravedade a esa altitude pois son iguais.

Comprobemos.

$$a_n = \frac{v_o^2}{r_o} = \frac{6200^2}{6370000 + 4000000} = 3{,}7\ m/s^2$$

$$g_h = \frac{G \cdot M_T}{r_o^2} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{r_o^2} = \frac{9{,}8 \cdot 6370000^2}{(6370000 + 4000000)^2} \cong 3{,}7\ m/s^2$$

E agora para o período:

$$v_o = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_o}{T_o} \rightarrow T_o = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_o}{v_o} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (6370000 + 4000000)}{6200} = 10509\ s$$

b) O módulo do momento angular é: $L = m \cdot v_o \cdot r_o = 6{,}43 \cdot 10^{12} kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$

c) As Leis de Kepler………………………………………………