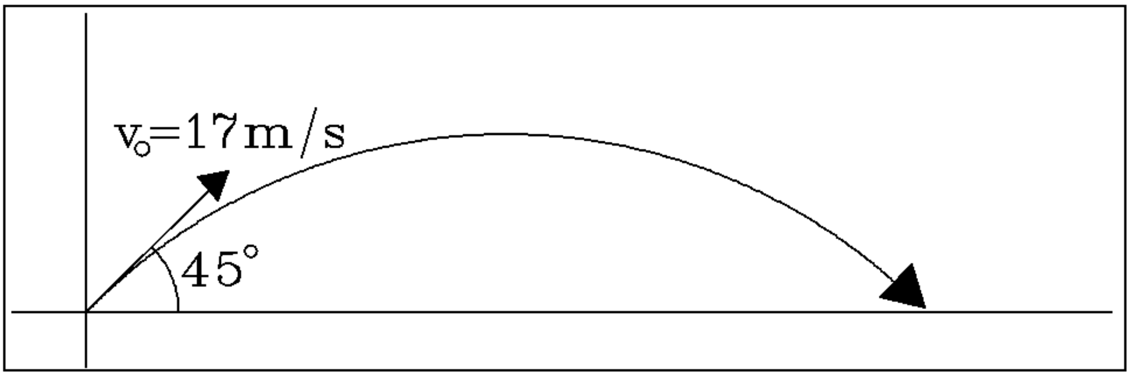
6.-Lanzamos un obxecto cunha velocidade inicial de 17 $m.s^{-1}$ que forma un ángulo de 45^{o} coa horizontal.
a) Escrebe as ecuacións do movemento.
b) Calcula a ecuación da traxetoria.
c) Calcula o alcance e a altura máxima que acada.
d) Posición do obxecto 1,5 s despois do lanzamento.
e) A altura a que se encontra cando a distancia horizontal dende o ponto de lanzamento sexa 6 m.
f) A distancia horizontal dende o ponto de lanzamento cando a altura serxa 1 m.
g) Calcula a velocidade final



O movemento consta de un MRU seguindo o eixe das X e un MRUA seguindo o eixe Y:

En X:

$$\boldsymbol{v_{0x} = v_0 \cdot \cos 45° \rightarrow v_{0x} = 17 \cdot cos\ 45° \rightarrow v_{0x} = v_x = \frac{17\sqrt{2}}{2}\ (\frac{m}{s})\ (1)}$$

$$x - x_0 = v_x(t - t_0) \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{17\sqrt{2}}{2} \cdot t\ \ (2)}$$

En Y : $\boldsymbol{v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen}\, 45° \rightarrow v_{0y} = 17 \cdot sen 45° = \frac{17\sqrt{2}}{2}\ \ (\frac{m}{s})}$

$$v_y - v_{0y} = a \cdot (t - t_0) \rightarrow v_y - \frac{\mathbf{17\sqrt{2}}}{\mathbf{2}} = -9{,}81 \cdot t \rightarrow \boldsymbol{v_y - \frac{17\sqrt{2}}{2} = -9{,}81 \cdot t\ \ (3)}$$

$$y - y_0 = v_{0y} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2 \rightarrow y - 0 = \frac{\mathbf{17\sqrt{2}}}{\mathbf{2}} \cdot t - 4{,}905 \cdot t^2$$

$$\boldsymbol{y = \frac{17\sqrt{2}}{2} \cdot t - 4{,}905 \cdot t^2\ \ (4)}$$

Agora coas catro ecuacións podes calcular qualquer dato que precises do movemento.

b) Para a **ecuación da traxetoria** despexa o tempo na ecuación (2) e sustitúe na rcuación (4):

$$x = \frac{17\sqrt{2}}{2} \cdot t \ \rightarrow t = \frac{x}{\frac{17\sqrt{2}}{2}} \rightarrow \boldsymbol{t = \frac{2x}{17\sqrt{2}}}$$

E agora sustituímos na ecuación (4):

$$\boldsymbol{y = \frac{17\sqrt{2}}{2} \cdot t - 4,905 \cdot t^2 \ \rightarrow y = \frac{17\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2x}{17\sqrt{2}} - 4,905 \cdot (\frac{2x}{17\sqrt{2}})^2}$$

$$\boldsymbol{y = x - 4,905 \cdot \frac{4 \cdot x^2}{17^2 \cdot 2} \ \rightarrow y = x - \frac{981 \cdot x^2}{28900}}$$

c) Para calcular o alcance máximo, tedes que ter en conta que nese intre $y = 0$

Tomas a ecuación (4) e introduces o valor anterior e obtes a ecuación:

$$\boldsymbol{0 = \frac{17\sqrt{2}}{2} \cdot t - 4,905 \cdot t^2}$$

E encontras como primeira solución t=0, o que é evidente pois nese intre y=0.

Interesa-nos o outro resultado que sairá da resolución de:

$$\boldsymbol{0 = \frac{17\sqrt{2}}{2} - 4,905 \cdot t}$$

De onde podes atopar sen dificultade que $\boldsymbol{t = 2,4507\ s}$

E agora recorrindo a ecuación (2):

$$\boldsymbol{x = \frac{17\sqrt{2}}{2} \cdot t \ \rightarrow x_{máximo} = Alcance = 29,4597\ m}$$

Para calcular a altura máxima, terás que ter en conta que nese intre a velocidade no eixe Y é cero, e podemos facer uso da ecuación (3):

$v_y - \frac{17\sqrt{2}}{2} = -9{,}81 \cdot t \ \rightarrow 0 - \frac{17\sqrt{2}}{2} = -9{,}81 \cdot t \ \rightarrow \boldsymbol{t = 1,225\ s}$ que observa é a metade do tempo anterior.

Agora calculas a altura máxima coa ecuación (4):

$$\boldsymbol{y = \frac{17\sqrt{2}}{2} \cdot t - 4,905 \cdot t^2} \ \rightarrow \boldsymbol{y_{Max}} = \frac{17\sqrt{2}}{2} \cdot 1{,}225 - 4{,}905 \cdot 1{,}225^2 = \boldsymbol{7,365\ m}$$

d) Para calcular a posición e a velocidade 1,5 s despois do lanzamento só compre sustituir nas ecuacións o valor do tempo e xa está:

$$\boldsymbol{v_{0x} = v_x = \frac{17\sqrt{2}}{2} \left(\frac{m}{s}\right)} \qquad \boldsymbol{v_y - \frac{17\sqrt{2}}{2} = -9,81 \cdot t \ \rightarrow v_y = -2,694\ m/s}$$

O valor negativo da velocidade en Y, indica que a partícula xa está descendendo, o que é coerente pois acadou a altura máxima con 1,225 s.

Agora calculamos a posición calculando a coordenada X e a Y:

$$\boldsymbol{x = \frac{17\sqrt{2}}{2} \cdot t \quad \rightarrow x_{1,5} = 18,03\ m} \quad ,$$

$$\boldsymbol{y = \frac{17\sqrt{2}}{2} \cdot t - 4,905 \cdot t^2 \rightarrow y_{1,5} = 6,995\ m}$$

Observa e discute se os resultados son congruentes.

e) Para calcular a altura cando se encontra a 6 m do ponto de lanzamento, podemos calcular o tempo ao que corresponde ese valor de X coa ecuación (2) e logo sustituir na ecuación (4)

$$\boldsymbol{x = \frac{17\sqrt{2}}{2} \cdot t \quad \rightarrow 6 = \frac{17\sqrt{2}}{2} \cdot t \quad \rightarrow t = 0,499\ s}$$

E agora imos á ecuación (4)

$$\boldsymbol{y = \frac{17\sqrt{2}}{2} \cdot t - 4,905 \cdot t^2 \rightarrow y = \frac{17\sqrt{2}}{2} \cdot 0,499 - 4,905 \cdot 0,499^2 = 4,78\ m}$$

Podíamos ter feito o calculo diretamente coa ecuación da traxetoria que proporciona os valores de Y se contamos co valor de X (e viceversa):

$$\boldsymbol{y = x - \frac{981 \cdot x^2}{28900} \rightarrow y = 4,78\ m}$$

f) Para calcular o valor de X sabendo que Y=1 m podemos repetir os pasos do apartado anterior. Veña, a por el!!!!

Eu vou facer uso da ecuación da traxetoria:

$$y = x - \frac{981 \cdot x^2}{28900} \rightarrow 1 = x - 0{,}034x^2 \rightarrow \boldsymbol{0,034x^2 - x + 1 = 0}$$

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^4 - 4 \cdot 0{,}034 \cdot 1}}{2 \cdot 0{,}034} = \frac{+1 \pm \sqrt{0{,}864}}{0{,}068} \rightarrow x_1 = 28{,}37\ m\ , x_2 = 1{,}036\ m$$

Por qué pensas que hai duas solucións? Observa que a parábola completa é unha curva simetrica. Seguro que descubres o porqué.

g) A velocidade final terá duas componentes, unha en X que é constante e da que xa coñecemos o valor, e outra en Y que será negativa. Calculemos o valor da componente en Y coa ecuación (3):

$$\boldsymbol{v_y - \frac{17\sqrt{2}}{2} = -9,81 \cdot t \quad \rightarrow v_y = \frac{17\sqrt{2}}{2} - 9,81 \cdot 2,4507 = -12,02\ m/s}$$

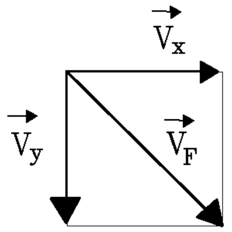
Así que a velocidade final ten duas componentes:

$$\vec{v}_{final} = \mathbf{\frac{17\sqrt{2}}{2}}\,\vec{\boldsymbol{i}} - \mathbf{12,02}\,\vec{\boldsymbol{j}}\ \left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}\right)$$

ou sexa:

$$\vec{v}_{final} = \mathbf{12,02}\,\vec{\boldsymbol{i}} - \mathbf{12,02}\,\vec{\boldsymbol{j}}\ \left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}\right)$$

Como ves as duas componentes son iguais. Claro, porque o ángulo coa que chega á superficie da Terra é de 45^0 e as suas componentes seran iguais (como no instante inicial)



$$\vec{V}_F = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$

$$\vec{V}_F = 12,02\ \vec{i}\ -\ 12,02\ \vec{j}\ (m/s)$$

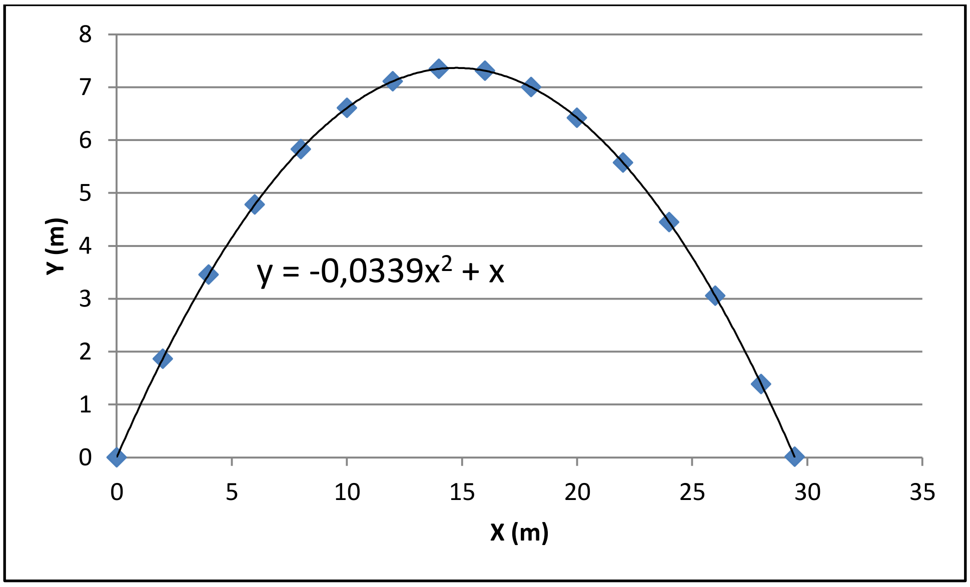
Unha cousa máis para reflexionar. Observa que a velocidade é a mesma ao principio e ao final.

Lembras aquilo da "conservación da enerxía"?

Vou debuxar a traxetoria por medio dunha folla de calculo por medio da ecuación da traxetoria:

$$y = x - \frac{981 \cdot x^2}{28900}$$

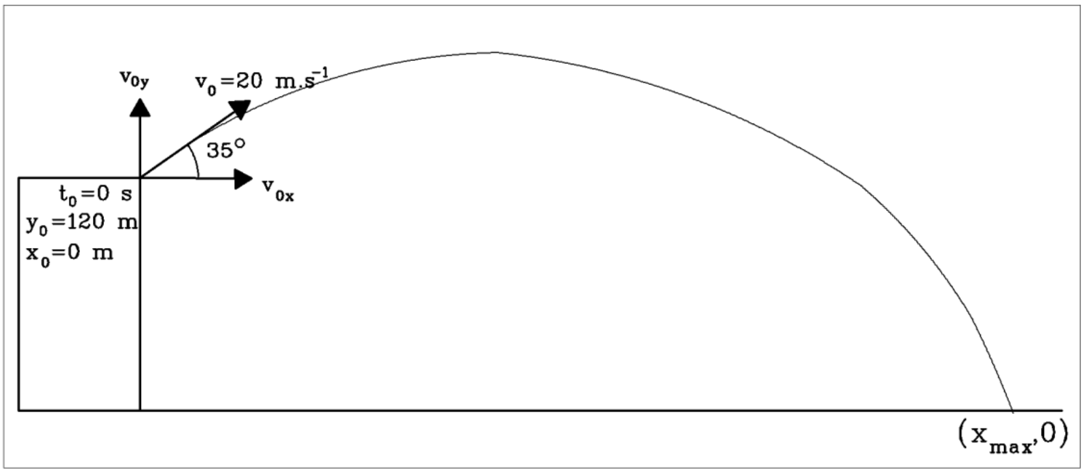
x (m)	y (m)
0	0
2	1,86422145
4	3,45688581
6	4,77799308
8	5,82754325
10	6,60553633
12	7,11197232
14	7,34685121
16	7,31017301
18	7,00193772
20	6,42214533
22	5,57079585
24	4,44788927
26	3,05342561
28	1,38740484
29,45	0,00973175



11.-Dende un acantil de 120 m de altura, lanzamos un corpo con velocidade 72 km/h cun ángulo de inclinación de 35º. Calcula a ecuación da traxetoria, o tempo que dura o vó, a altura máxima que acada, o alcance e a velocidade no momento do choque coa superficie do mar (define o seu módulo direción e componentes)

En primeiro lugar compre espresar a velocidade en unidades S.I.

$$72\frac{km}{h}\cdot\frac{10^3 m}{1\ km}\cdot\frac{1\ h}{3600\ s}=20\ m.s^{-1}$$



Como se apreza no debuxo, a velocidade inicial ten duas componentes, unha en X e outra en Y. A primeira relaciona-se co coseno do ángulo de lanzamento e a segunda relacionada co seno. Así que:

$\boldsymbol{v_{0x}=v_0\cdot\cos 35°}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{v_{0y}=v_0\cdot\operatorname{sen} 35°}$

<u>No eixe X o corpo realiza un M.R.U</u> no que $\boldsymbol{v_x=v_{0x}=20\cdot cos30°=16,38\ m\cdot s^{-1}}$

Ademais $x_0=0\ m$ e $t_0=0\ s$

E polo tanto : $x-x_0=v_x(t-t_0)\ \rightarrow \boldsymbol{x=16,38\cdot t\ \ (1)}$

<u>No eixe Y o corpo realiza un M.R.U.A</u> coas seguintes carateristicas:
a) $y_0=120\ m$ e $t_0=0\ s$
b) $v_{0y}=v_0\cdot\operatorname{sen}35°=11,47\ m\cdot s^{-1}$
c) $a=-9,81\ m\cdot s^{-2}$

Agora nas ecuacións do M.R.U.A:

$$v_y-v_{0y}=a\cdot(t-t_0)\ \rightarrow v_y-11,47=-9,81\cdot t\ \rightarrow \boldsymbol{v_y=11,47-9,81\cdot t\ \ (2)}$$

$$y-y_0=v_{0y}\cdot(t-t_0)+\frac{1}{2}\cdot a\cdot(t-t_0)^2\ \rightarrow y-120=11,47\cdot t-4,905\cdot t^2\ \rightarrow$$

$$\boldsymbol{y=120+11,47\cdot t-4,905\cdot t^2\ \ (3)}$$

a) A ecuación da traxetoria obtémola despexando o tempo na ecuación (1) e sustituíndo na ecuación (3):

$$x = 16{,}38 \cdot t \quad \rightarrow \boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{16,38}}$$

E agora sustiuímos na ecuación (3):

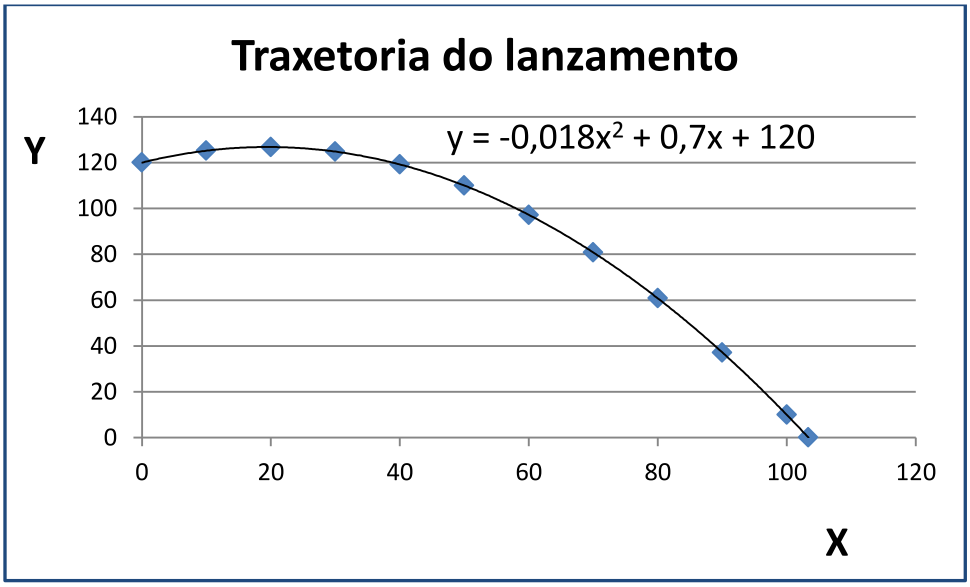
$$y = 120 + 11{,}47 \cdot t - 4{,}905 \cdot t^2 \quad \rightarrow y = 120 + 11{,}47 \cdot \frac{x}{16{,}38} - 4{,}905 \cdot (\frac{x}{16{,}38})^2$$

E reordeando e simplificando:

$$\boldsymbol{y = 120 + 0,7 \cdot x - 0,018 \cdot x^2}$$

Esta ecuación é independente do tempo e proporciona a traxetoria do lanzamento. Vou obter unha taboa de datos e unha gráfica coa folla de calculo. Iso non é necesario para resolver o problema, porén é útil pois **estamos estudando**:

x (m)	y (m)
0	120
10	125,2
20	126,8
30	124,8
40	119,2
50	110
60	97,2
70	80,8
80	60,8
90	37,2
100	10
103,35	0,082995



Para calcular a altura máxima, teremos en conta que nese intre a velocidade en Y é cero. Usando a ecuación (2):

$$v = 11{,}47 - 9{,}81 \cdot t \rightarrow \quad 0 = 11{,}47 - 9{,}81 \cdot t \quad \rightarrow \boldsymbol{t = 1,17\ s}$$

Nese intre podemos calcular os valores de X e Y coas ecuacións (1) e (3) e obtemos:

$$x = 16{,}38 \cdot t \; = 16{,}38 \cdot 1{,}17 = 19{,}15\ m$$

$$y = 120 + 11{,}47 \cdot t - 4{,}905 \cdot t^2 = 120 + 11{,}47 \cdot 1{,}17 - 4{,}905.\, 1{,}17^2 = \boldsymbol{126,7\ m}$$

Fíxate que coincide cos datos da taboa (deixando de lado aproximacións)

Para calcular o alcance máximo, temos que calcular o momento no que Y fai-se cero.

Podemos facer uso da ecuación da traxetoria:

$$y = 120 + 0{,}7 \cdot x - 0{,}018 \cdot x^2$$

E como Y=0:

$$0 = 120 + 0{,}7 \cdot x - 0{,}018 \cdot x^2$$

Resolvemos a ecuación de 2º grao :

$$x = \frac{-0{,}7 \pm \sqrt{0{,}7^2 - 4(-0{,}018) \cdot 120}}{2 \cdot (-0{,}018)} = \frac{-0{,}7 \pm 3{,}022}{-0{,}036} = 103{,}38\, m$$

Este valor coincide moi ben co da taboa.

Tamén podíamos calcular o tempo que tarda Y en acadar o valor cero coa ecuación (3) e logo calcular X coa ecuación (1)

$$y = 120 + 11{,}47 \cdot t - 4{,}905 \cdot t^2 \ \rightarrow 0 = 120 + 11{,}47 \cdot t - 4{,}905 \cdot t^2$$

$$x = \frac{-11{,}47 \pm \sqrt{11{,}47^2 - 4 \cdot (-4{,}905) \cdot 120}}{2 \cdot (-4{,}905)} = \frac{-11{,}47 \pm 49{,}86}{-9{,}81} = 6{,}25\, s$$

E agora sustituíndo na ecuación (1) calculamos o alcance:

$$x = 16{,}38 \cdot t \ = 16{,}38 \cdot 6{,}25 \cong 103\, m$$

Como ves coincide co resultado anterior e cos resultados da taboa.

Calculemos agora a velocidade no momento en que o obxecto chega ao mar.

Nese intre a velocidade en X seguirá a ser a mesma: $\boldsymbol{\vec{v}_x = 16,38\, \vec{\imath}} \ \ (\boldsymbol{m \cdot s^{-1}})$

En Y podemos calcular a velocidade coa ecuación (2):

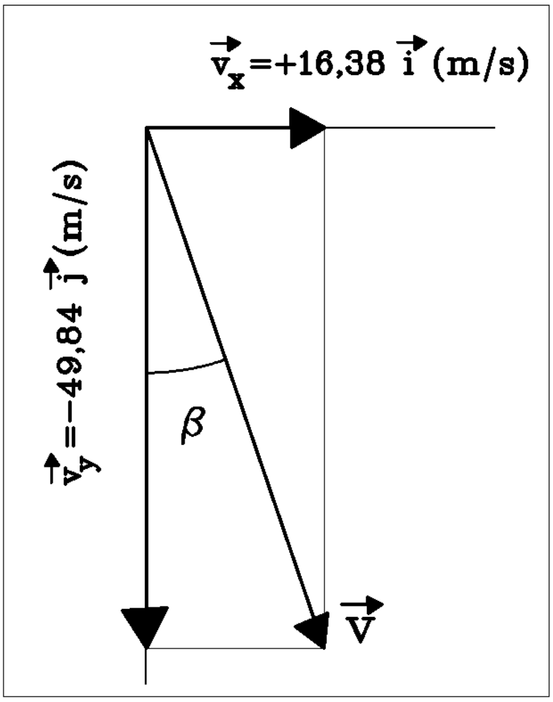
$v_y = 11{,}47 - 9{,}81 \cdot t = 11{,}47 - 9{,}81 \cdot 6{,}25 = -49{,}84\, m \cdot s^{-1}$ e de xeito vetorial:

$$\boldsymbol{\vec{v}_y = -49.84\, \vec{\jmath}} \ (\boldsymbol{m \cdot s^{-1}})$$

Así que o vetor velocidade instantánea no momento do choque coa auga será:

$$\vec{v} = 16,38\,\vec{i} - 49,84\,\vec{j}\ \ (m \cdot s^{-1})$$

Imos representar ese vetor de velocidade :



O módulo da velocidade será:

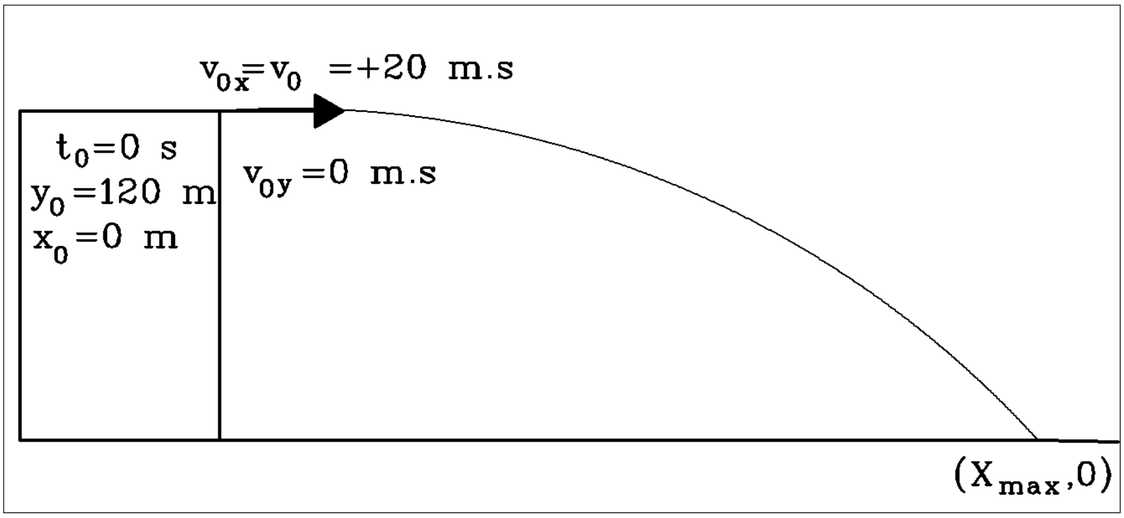
$$v = \sqrt{16{,}38^2 + (-49{,}84)^2} = 52{,}46\, m \cdot s^{-1}$$

E o ángulo que forma coa direción sería β que podemos calcular co arcotanxente:

$$\beta = arctg\frac{16{,}38}{49{,}84} = 18{,}19°$$

12.-Resolve o problema anterior, se o tiro fora horizontal.

Xa sabemos que a velocidade de lanzamento vai ser 20 m.s^{-1}. Fagamos un debuxo aproximado do lanzamento:



Observa que neste caso a velocidade inicial en Y é cero, e a única componente da velocidade é en X pois o lanzamento é horizontal.

Comezaremos sempre por buscar as ecuacións que definen os movementos en X e Y.

En X o movemento é un M.R.U coas carateristicas da figura. Polo tanto:

1. A velocidade é constante e ten como valor 20 m.s^{-1}.
2. Ademais $x_0 = 0\ m$ e $t_0 = 0\ s$

Polo tanto as ecuacións da velocidade e da posición en X serán:

- $v_x = v_{0x} = v_0 = 20\ m \cdot s^{-1}$
- $x - x_0 = v_x \cdot (t - t_0) \rightarrow \boldsymbol{x = 20 \cdot t\ \ (1)}$

En Y o movemento é un M.R.U.A coas seguintes condicións:

1. A velocidade inicial en Y é cero: $v_{0y} = 0\ m \cdot s^{-1}$
2. Ademais $y_0 = 120\ m$
3. A aceleración é $-9{,}81\ m \cdot s^{-2}$

Polo tanto as ecuacións da velocidade e da posición en X serán:

- $v_y - v_{0y} = a \cdot (t - t_0) \rightarrow \boldsymbol{v_y = -9{,}81 \cdot t\ \ (2)}$
- $y - y_0 = v_{0y} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2 \rightarrow y - 120 = -4{,}905 \cdot t^2 \rightarrow$

$$\boldsymbol{y = 120 - 4{,}905 \cdot t^2\ (3)}$$

Para obter a ecuación da traxetoria, seguimos os pasos xa vistos no exercicio 10:

Depexamos o tempo na ecuación (1) : $\boldsymbol{t = \frac{x}{20}}$

E agora sustituímos na ecuación (3):

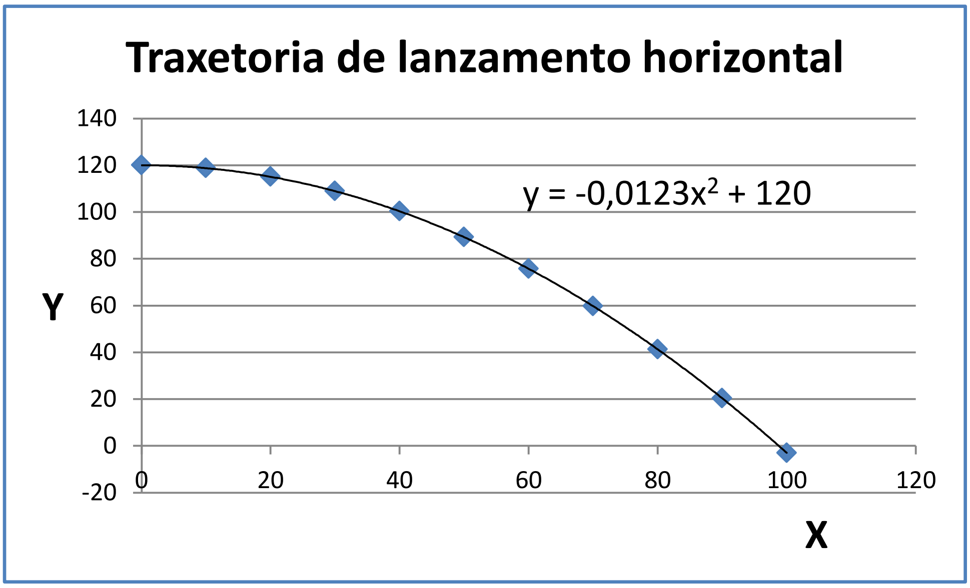
$$y = 120 - 4{,}905 \cdot t^2 = 120 - 4{,}905 \cdot (\frac{x}{20})^2$$

E reordeando e simplificando:

$$\boldsymbol{y = 120 - 0,0123 \cdot x^2}$$

Como antes vou preparar unha taboa de valores e un gráfico da traxetoria nunha folla de calculo. Xa sabes que isto non é preciso para resolver o problema mais é útil para estudar e comprender. Ti podes facelo no teu computador.

x (m)	y (m)
0	120
10	118,77
20	115,08
30	108,93
40	100,32
50	89,25
60	75,72
70	59,73
80	41,28
90	20,37
100	-3



Observa que o dato final correspondente a X=100 m, da un valor negativo de Y. Iso quere dicer que o alcance máximo é un pouco menor de 100 m.

Non ten senso calcular a altura máxima pois neste casoese valor é precisamente a altura do lanzamento.

Calculemos o alcance máximo. Nese intre Y=0 e podemos calcular o alcance máximo coa ecuación da traxetoria facendo Y=0:

$$0 = 120 - 0{,}0123 \cdot x^2 \rightarrow \boldsymbol{x = 98,77\ m}$$

Tamén podíamos calcular este resultado acudindo á ecuación (3) e facendo Y=0. Podemos así calcular o tempo que dura o vó do obxecto lanzado:

$$0 = 120 - 4{,}905 \cdot t^2 \;\rightarrow \boldsymbol{t = 4,95\ s}$$

E agora sustituíndo na ecuación (1):

$$x = 20 \cdot t \;\rightarrow\; \boldsymbol{x_{maxximo} = 98,92\ m}$$

Coincidente co resultado anterior e concordante coa taboa e o gráfico.

E cal será a velocidade no momento no que choque coa auga? Pois a velocidade terá unha componente en X e outra en Y.

A componente en X será: $\boldsymbol{\vec{v}_x = 20\,\vec{\imath}\ \ (m \cdot s^{-1})}$ pois é constante.

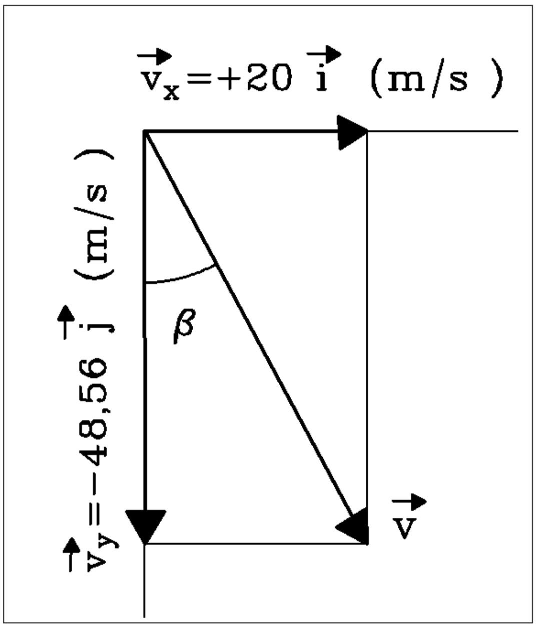
A componente en Y podemola calcular coa ecuación (2):

$$v_y = -9{,}81 \cdot t = -48{,}56\, m \cdot s^{-1}$$

Que expresada vetorialmente sería: $\boldsymbol{\vec{v}_y = -48,56\,\vec{\jmath}\ \ (m \cdot s^{-1})}$

Polo tanto a velocidade é un vetor que no momento do choque coa auga, expresada en componentes é:

$\boldsymbol{\vec{v} = 20\,\vec{\imath}\ - 48,56\,\vec{\jmath}\ \ (m \cdot s^{-1})}$



O módulo da velocidade será:

$$v = \sqrt{20^2 + (-48{,}56)^2} = 52{,}52\, m \cdot s^{-1}$$

E o ángulo que forma coa direción sería β que podemos calcular co arcotanxente:

$$\beta = arctg\frac{20}{48{,}56} = 22{,}38°$$