Tema 1:Medicións e incertidumes

1.-Magnitudes en Física.
- Magnitudes fundamentais e derivadas.
- Ecuacións de dimensións.

2.-Unidades de medida.
- Sistema Internacional.
- Multiplos e submultiplos.
- Notación científica.
- Conversión de unidades.

3.-Instrumentos de medida.
- Carateristicas.
- Orde de magnitude. Estimación.
- Cifras significativas.

4.-Certidume e incertidume.

5.-Definición de erro absoluto, relativo e porcentaxe de erro para experiencias cunha soa medida.

6.-Determinación do erro absoluto, relativo e porcentaxe de erro cando procesamos unha serie de medidas.

7.-Regras para estimar a incertidume en resultados calculados.

8.-Magnitudes escalares e vetoriais. Nocións de calculo vetorial.

Magnitudes

- Unha <u>magnitude</u> é qualquer propiedade da materia ou dun fenómeno natural, que pode ser medida obxectivamente.
- Para poder medir magnitudes precisamos:

1. Unha **unidade** (metro, segundo)
2. Un **instrumento de medida** (regra, cronómetro)
3. Un **sistema de multiplos e submultiplos** para poder medir cantidades maiores ou menores (quilómetro, milímetro, milisegundo, minuto)

Magnitudes fundamentais

- Magnitudes fundamentais son aquelas que se definen por si mesmas. Escollen-se por convenio, por acordo.
- Polo de agora imos considerar só tres magnitudes fundamentais:

Magnitude	Símbolo	Unidade (S.I)
Masa	M	Kg (quilogramo)
Lonxitude	L	m (metro)
Tempo	T	s (segundo)

Nota: as siglas S.I fan referencia ao Sistema Internacional de unidades

Magnitudes derivadas

- Magnitudes derivadas son aquelas que se definen en función das magnitudes fundametais e relacionan-se con estas por medio de expresións matemáticas.
- Son magnitudes derivadas por exempro a superficie, o volume, a densidade, a velocidade, a aceleración, a forza ou a enerxía.

Magnitude	Símbolo	Unidade (S.I)
Superficie	S	m^2
Volume	V	m^3
Densidade	d	kg/m^3 ($kg.m^{-3}$)

Ecuacións de dimensións

- Denomínan-se **ecuacións de dimensións** ás ecuación que relacionan ás magnitudes derivadas coas magnitudes fundamentais.
- Serven para definir unidades e establecer relacións entre elas.
- Ademais permeten estudar a homoxeneidade dimensional das ecuacións físicas.
- Nas ecuacións de dimensións non temos en conta se a magnitude é escalar ou vetorial.

Algunhas ecuacións de dimensións

Superficie (S)

1)Para un cadrado: $S = l^2$

Como magnitude do lado é : $[l] = L$

Polo tanto: $[S] = L^2$

2)Para un retangulo: $S = a \cdot b$

Como magnitude dos lados : $[a] = [b] = L$

Polo tanto: $[S] = L^2$

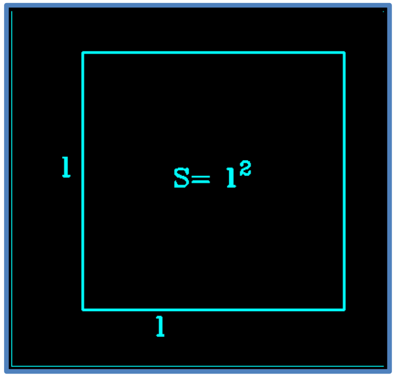
3)Para un circulo: $S = \pi \cdot r^2$

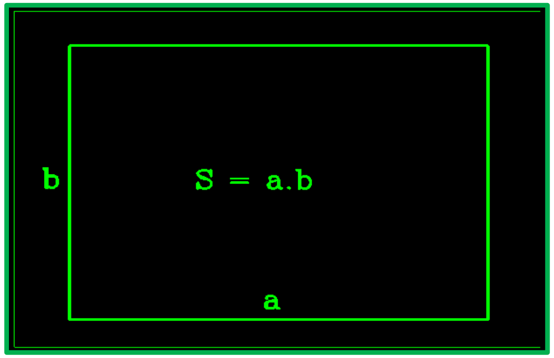
Como magnitude: $[r] = L$ (π é un número)

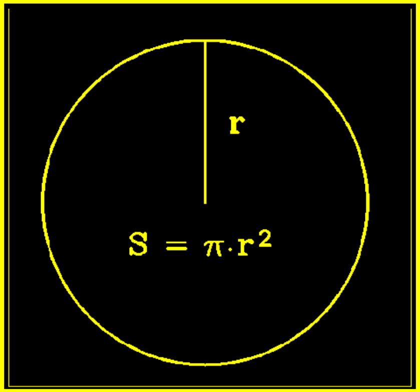
E tamén resulta: $[S] = L^2$

En todos os casos, a unidade no S.I

será o metro cadrado: $\boldsymbol{m^2}$







Algunhas ecuacións de dimensións

- <u>Volume (V)</u>

1)Para un cubo de arista l :$V = l^3$

Como magnitude: $[l] = L$

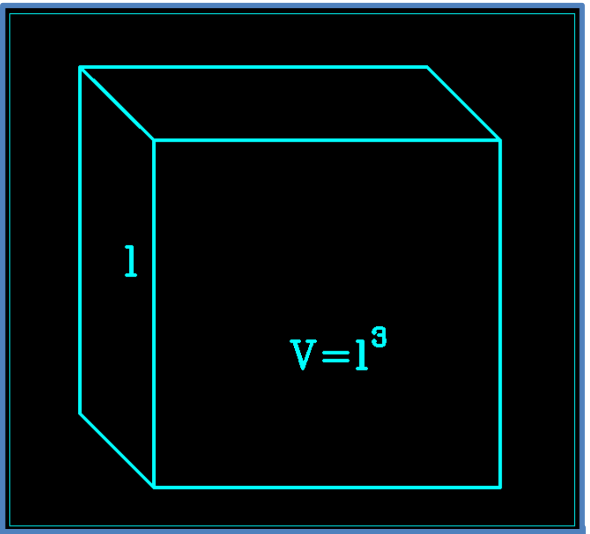
Polo tanto: $[V] = L^3$

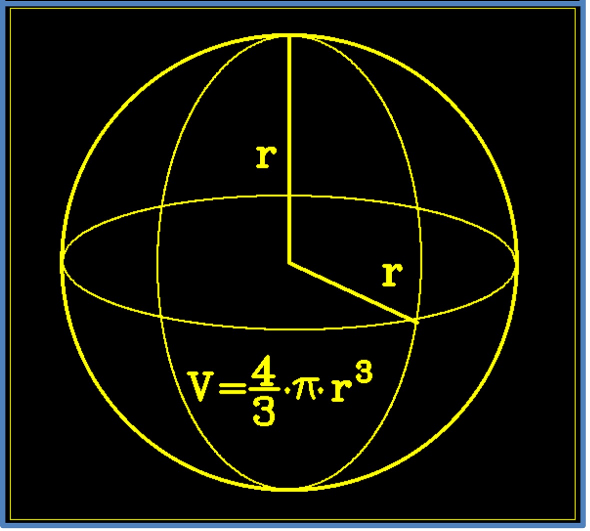
2)Para unha esfera de raio r: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Como a magnitude: $[r] = L$

Polo tanto: $[V] = L^3$ pois 4/3 e π son números adimensionais.

En todos os casos a unidade de volume que resulta no Sistema Internacional é o metro cúbico : $\boldsymbol{m^3}$





Algunhas ecuacións de dimensións

- Densidade (d ou ρ)

1)A diferencia da masa, da superficie e do volume, que son propiedades xerais e extensivas que non permiten diferenciar distintos tipos de materia, a densidade é unha propiedade específica e intensiva permite diferenciar distintos tipos de materia e é independente da cantidade de materia.

2)A densidade é a relación entre masa e volume: $\rho = \frac{m}{V}$

3)A masa é fundamental e exprésa-se como: $[m] = M$

4)O volume, como acabamos de ver: $[V] = L^3$

5)Polo tanto: $[\rho] = \frac{M}{L^3} = M \cdot L^{-3}$

6)No Sistema Internacional as súas unidades son $\frac{\boldsymbol{kg}}{\boldsymbol{m^3}}$ ou $\boldsymbol{kg \cdot m^{-3}}$

Unidades de medida

Medir unha magnitude é comparar a intensidade desa magnitude cunha cantidade da mesma que usamos como patrón e que calificamos de **unidade**.

A eleción dunha unidade é unha decisión relativamente discrecional que se adoita por convenio.

Xa dende o século XVIII os científicos comezaron a impulsar un Sistema Internacional de medidas e definiron a unidade de lonxitude (o metro) e a de masa (o quilogramo).

Na atualidade contamos co S.I, que define:

1.-Unidades das Magnitudes fundamentais no S.I:

Masa	Lonxitude	Tempo	Intensidade (corrente elétrica)	Temperatura	Cantidade de substancia	Intensidade luminosa
Quilogramo(kg)	Metro (m)	Segundo (s)	Amperio (A)	Kelvin (K)	mol	candea (cd)

Unidades de medida

2.-Unidades das Magnitudes derivadas no S.I:

Obteñen-se diretamente das ecuacións de dimensións como xa vimos.

Por exempro xa vimos que o volume : $[V] = L^3$, polo tanto a sua unidade no S.I é o $\boldsymbol{m^3}$.

Faremos uso de **multiplos** e **submultiplos** para poder representar medidas maiores e menores facendo uso de fatores expresados en notación científica.

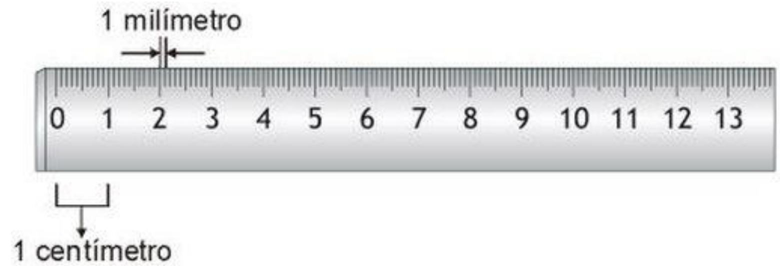
Multiplos		
Fator	**Prefixo**	**Símbolo**
10^1	deca	da
10^2	heto	h
10^3	quilo	k
10^6	mega	M
10^9	xiga	G

Submultiplos		
Fator	**Prefixo**	**Símbolo**
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	µ
10^{-9}	nano	n

Instrumentos de medida

Un instrumento de medida é un aparato que permite a medición dunha magnitude porque incorpora un sistema de patrón desa magnitude.

Por exempro unha regra:



Permete medir lonxitudes.

Os instrumentos de medida deben posuir certas carateristicas:

a)<u>Sensibilidade</u>.

É o desprazamento do índice ou marcador, contado en divisións de escala, producido por unha pequena variación da magnitude. Decimos que o instrumento é sensibel cando unha lixeira variación da magnitude provoca un desprazamento maior do índice. En suma, é máis sensibel o instrumento que mellor responde á variación da magnitude.

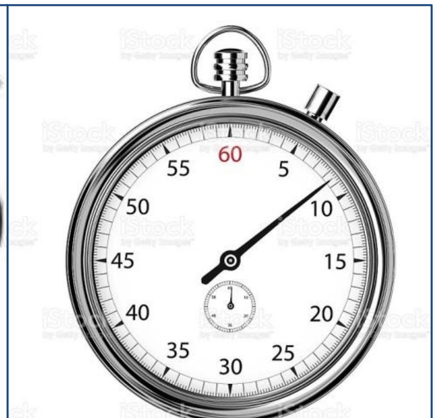
Instrumentos de medida

En moitas ocasións tamén chamamos **sensibilidade** á menor cantidade que un instrumento pode medir de certa magnitude.

Por exempro, a sensibilidade da regra da paxina anterior é 1 mm.

Observa os dous cronómetro seguintes e discute qual ten maior sensibilidade:

Cronómetro dixital de sensibilidade 0,01 s



Cronómetro analóxico de sensibilidade 0,2 s

Efetivamente o dixital é máis sensibel que o analóxico.

No primeiro caso o mínimo desprazamento do marcador, indica 0,01 s.

No analóxico o mínimo desprazamento sinala 0,2 s.

Neste caso, o dixital é máis sensibel que o analóxico.

Instrumentos de medida

Balanza analítica (0,1 mg)

Balanza dixital (0,01 g)

Balanza dixital (0,1 g)

Estas tres balanzas teñen sensibilidades distintas. A máis sensibel é aquela que pode chegar a detetar 0,1 mg=10^{-4} g. As outras duas teñen sensibilidades menores (0,01 e 0,1 g respetivamente)

b)<u>Intervalo de medida</u>: indica a medida mínima e máxima que pode realizar un instrumento de medida.

Instrumentos de medida

c)<u>Exatitude e precisión</u>

A **exatitude** dun instrumento de medida define a súa capacidade para, en medidas repetidas dunha mesma cantidade da magnitude, dar resultados corretos e iguais ao valor real da medida. A **precisión** refíre-se á dispersión dos valores obtidos: a maior precisión, menor dispersión.

<u>Por exempro</u> se medimos 5 veces a lonxitude dunha taboa, que sabemos que mide 173 cm, con tres instrumentos e obtemos os resultados da taboa:

Instrumento	Medida 1	Medida 2	Medida 3	Medida 4	Medida 5
Instrumento A	173	172	173	173	174
Instrumento B	170	156	185	177	160
Instrumento C	165	166	164	166	164

O instrumento A é preciso e exato. O B é máis impreciso e inexato e o C é preciso máis é inexato.

Orde de magnitude. Estimación.

En Física estuda-se dende as partículas máis pequenas da materia, ate os fenómenos de grandes agrupacións de masas no Universo.

Chamamos orde de magnitude á potencia de 10 máis achegada ao resultado correto. Por exempro a masa dun átomo de hidróxeno ($1{,}67.10^{-27}$kg) ten como orde de magnitude 10^{-27}kg.

O orde de magnitude da masa da terra ($5{,}98.10^{24}$kg) é 10^{24}kg.

En ocasións, para deseñar experiencias, precisaremos facer unha estimación do orde de magnitude do resultado que agardamos. Unha estimación non é aínda unha determinación cuantitativa, basicamente é unha aproximación que vai permeter, posteriormente, dita determinación.

Para a estimación é moi importante escoller con tino un certo número de **cifras significativas**.

Cifras significativas

Son todos os díxitos dun dato que teñen significado.

- Poden estar antes ou despois da “coma” e inclúen os “ceros”.
- Como <u>regra xeral</u> decimos que os resultados dun experimento debe conter o mesmo número de cifras significativas que os datos medidos.

Por exempro: se medimos a lonxitude dunha taboa tres veces cunha regra que ten unha sensibilidade de 1 mm e obtemos os valores 510, 512 e 514 mm seguro que o valor real estará entre 510 e 514 e o valor máis probabel é 512 que é o valor medio e ten tamén 3 cifras significativas.

Agora supoñamos que obtemos unha nova medida de 511 mm. O resultado real debe estar entre 510 e 514 poren agora se calculamos o valor medio obtemos 511,75 mm. Pois ben, neste caso o 7 e 5 non son significativos. E hai que redondear a 3 cifras.

Ténica do redondeo

Antes de nada debemos saber que o redondeo é unha operación que debemos realizar como o <u>paso final do proceso de calculo</u>.

Exempro: imos calcular a enerxía potencial gravitatoria dun corpo de 1,25 kg de masa situado a 2,50 m de altura e tendo en conta que g=9,81 N/kg.

Observa que todos os datos teñen **3 cifras significativas**.

$$E_P = m \cdot g \cdot h = 1{,}25\ kg \cdot \frac{9{,}81 N}{kg} \cdot 2{,}50 m = 30{,}65625\ J$$

O resultado ("de calculadora") en función dos datos aportados debe ser redondeado a 30,66 J.

E se nos deran como dato da altura o valor 2,5 m?

Pois enton habería que redondear a 30,7 J.

Regras de redondeo

O obxectivo da operación de redondeo é obter un resultado que cumpra coas cifras significativas dos datos, para elo teremos que rexeitar parte das cifras de resultado.

1.-Se a cifra deprezada é :

- Maior que 5: a anterior incrementa-se en 1 unidade. Por exempro para redondear 6,778 a un único decimal : 6,8
- Menor que 5: a anterior diminúe-se en 1 unidade. Por exempro 6,335 a un decimal: 6,3

2.-As **sumas** e **restas** con decimais redondean-se ao número de decimais do dato que teña menos. Por exempro:

$$3{,}50cm + 0{,}87cm + 29{,}4cm = 33{,}77cm \cong 33{,}8cm$$

<u>Observa</u>: 3 cifras 3 cifras 3 cifras 3 cifras

3.-No caso de **multiplicacións** ou **divisións**, redondea-se o resultado ate o que teña menor número de cifras significativas. Por exempro:

$$37{,}5cm \cdot 23{,}54cm = 882{,}8cm^2 \cong 883cm^2$$

<u>Observa</u>: 3 cifras 4 cifras 3 cifras

Certidume e incertidume

As medidas conteñen erros. Nunca temos plena certeza da correción do resultado obtido. Definimos:

Incertidume: é o intervalo por arriba e por abaixo dun valor dado no que cabe agardar se encontren as medidas realizadas e repetidas dunha experiencia.

Precisión: é a diferenza que existe entre os valores medidos. Decimos que as medidas son precisas cando os resultados medidos posuen pequenas incertidumes e cando os valores medidos son moi semellantes entre sí.

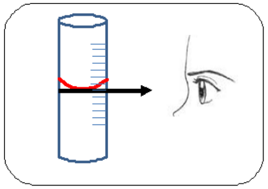
Erro ou incertidume: en xeral é a diferenza entre o “valor verdadeiro” e cada “valor medido”. Observa que sabemos que nunca temos plena certeza mais falamos de “valor verdadeiro” ou “valor correto”. Aclararemos isto un pouco máis adiante.

Tipos de erro ou incertidumes

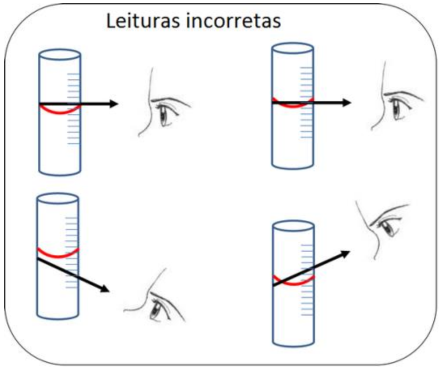
1.-**<u>Erros sistemáticos</u>**: son aqueles que derivan de defetos do instrumento (normalmente derivado dun mal calibrado ou de mala fabricación) ou da súa inadecuación. Manifestan-se sempre no mesmo sentido e son independentes do observdor/a. Poden-se evitar correxindo o calibrado ou cambiando de instrumento.

2.-**<u>Erros aleatorios</u>**: son inevitabeis e imprevisibeis pois as “medidas exatas” non existen. A súa existencia pode derivar de:

- Leitura incorreta: ver imaxes.
- Dificultade da observación.
- Carateristicas do observador/a.



Leitura correta



O efeito destes erros póde-se correxer repetindo a experiencia moitas veces e facendo uso do calculo estatístico.

Incertidume dun instrumento de medida

A leitura dun aparato de medida e a súa incertidume, deriva en primeiro luga de se o instrumento é dixital ou analóxico.

- Instrumento dixital: a incertidume será a cifra correspondente á división máis pequena que amose a pantalla. Ou sexa que vai coincidir coa sensibilidade do instrumento. Xa vimos antes algúns instrumentos (balanzas e cronómetro).
- Instrumento analóxico:a incertidume será a mitade da división máis pequena. En suma, a incertidume é a mitade da sensibilidade do instrumento.

Exempro 1: regra dividida en **mm**:

Sensibilidade (precisión): ± 1 mm, incertidume: ±0,5 mm

Exempro 2: termómetro dividido en graos centigrados (^{o}C)

Sensibilidade (precisión):± 1^{o}C, incertidume: ± 0,5 ^{o}C

Incertidume dun instrumento de medida

Exempro 3: observa as duas probetas da figura :

Probeta A: intervalo de medida de 10 a 100 mL

Sensibilidade: ±1 mL incertidume: ±0,5 mL

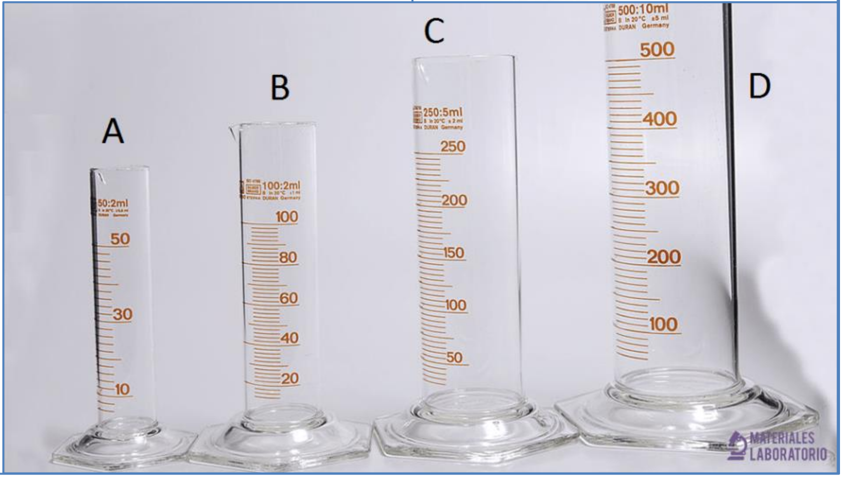
Probeta B: intervalo de medida de 5 a 50 mL

Sensibilidade:±1 mL incertidume: ±0,5 mL

Exempro 4: Observa as probetas A,B,C e D

Na taboa tes indicado intervalo , sensibilidade e incertidume.

Tipo	Int. (mL)	S (mL)	Inc.(mL)
A	6-50	±2	±1
B	14-100	±2	±1
C	30-250	±5	±2
D	60-500	± 10	± 5



Incertidume dun instrumento de medida

<u>Exempro 5</u>: os amperímetros da figura responden ao indicado na taboa adxunta:

A B

Tipo	Int. (A)	S (A)	Inc.(A)
A	0-10	±0,2	±0,1
B	0-5	±0,1	±0,05

Observación: este é un miliamperimetro.

Escrebe o seu intervalo, a sua sensibilidade e a sua incertidume:

Incertidume dun instrumento de medida

Exempro 6: imos determinar a sensibilidade e incertidume dos cronómetros das imaxes.

Cronómetro A

Cronómetro B

Cronómetro	S	Inc.
A	±0,2	±0,1 s
B	±0,01	±0,01

Observa que o primeiro cronómetro é analóxico e polo tanto tomamos a mitade da sensibilidade como incertidume. O cronómetro B é dixital e polo tanto tomamos como incertidume a sensibilidade.

Erro absoluto e erro relativo

- Definimos **erro absoluto** (**E_A ou Δx**) como a diferenza entre o valor medido (x) e o valor real,verdadeiro ou representativo (x_R) expresado en valor absoluto:

$$\boldsymbol{E_A = \Delta x = |x - x_R|}$$

Observa que o <u>erro absoluto ten unidades</u>.

Exempro 1: medimos unha lonxitude de 100 mm facendo uso dun certo mecanismo e obtemos o valor 98 mm. O erro absoluto que cometemos é ±2 mm. Polo tanto podemos expresar que a medida resultante é 100±2mm ou tamén que estará comprendida no intervalo (98,102)mm

- Definimos **erro relativo** (**E_R**) como o cociente: $\boldsymbol{E_R = \frac{E_A}{x_R}}$

No caso anterior: $E_R = \frac{2\ mm}{100\ mm} = 0{,}02$

Observa que carece de unidades. As veces espresa-se en tanto por cen, por exempro no caso anterior sería o 2%.

Erro absoluto para o caso de 1 medida

No caso de realizar só **unha medida**, tomaremos como erro absoluto o valor da incertidume do aparato de medida.

Exempro 2: medimos cunha regra gradada en mm unha distancia de 32,5 cm. Calcula o erro absoluto.

Teremos en conta:

- Sensibilidade do instrumento: ±1 mm=±0,1 cm
- Incertidume do instrumento: ±0,5 mm=±0,05 cm
- Erro absoluto: ±0,5 mm=±0,05 cm
- Medida expresada corretamente: (32,5±0,05)cm
- O valor real estará comprendido no intervalo: (32, 33) cm

Erro relativo para o caso de 1 medida

Definimos erro relativo ao cociente entre a erro absoluto e o valor medido que tomamos como verdadeiro.

Por exempro, no exempro anterior:

$$E_R = \frac{E_A}{Valor\ real} = \frac{0{,}05\ cm}{32{,}5\ cm} = \frac{1}{650}$$

Observa que carece de unidades. É un “tanto por un” que indica o erro cometido por unidade medida.

Algunhas veces expresamos o erro relativo en “tanto por cen” facendo uso da expresión:

$$E_R = \frac{E_A}{Valor\ real} \cdot 100$$

No exempro anterior, o resultado sería unha porcentaxe: 0,154%

Exercicio: determinamos a temperatura de 37ºC por medio de dous termómetros analóxicos. O primeiro está gradado en unidades de grao e o segundo en décimas de grao. Estuda a imprecisión cometida en cada caso.

Termómetro A:

Sensibilidade do instrumento: ±1ºC

Incertidume : ±0,5ºC →Erro absoluto: ±0,5ºC

Intervalo: (37±0,5)ºC polo tanto o valor medido debe estar sempre no intervalo: (36,5 , 37,5) ºC

$$E_R = I_R = \frac{E_A}{Valor\ real} = \frac{0{,}5^{o}C}{37^{o}C} = 0{,}0135 \rightarrow \% = 1{,}35\%$$

Termómetro B:

Sensibilidade ou precisión: ±0,1ºC

Incertidume : ±0,05ºC →Erro absoluto: ±0,05ºC

Segue e comproba que $\% = 0{,}135\%$

Calculo de erros nunha serie de medidas

Normalmente as medicións repíten-se moitas veces para asegurar que reducimos o impato dos erros cometidos. Neste caso faremos un tratamento estatístico dos datos.

Imos repasar as partes do proceso partindo dun exempro .

<u>Exercicio</u>: para levar a cabo certo procedemento, temos que determinar o volume de auga cunha probeta de 100 mL gradada en mL e obtemos os seguintes resultados:

Medida	1	2	3	4	5
Volume (mL)	25	26	24	25	26

Estuda o erro absoluto, o erro relativo e a porcentaxe de erro cometido.

Comecemos por anotar: sensibilidade : ±1 mL e polo tanto a incertidume é ±0,5 mL .

Observa ademais que as medidas estan pouco dispersas, logo a precisión é alta.

Agora imos calcular o **valor medio** (valor verdadeiro ou valor representativo). Tomaremos como tal a media aritmética dos valores medidos:

$$V_{medio} = \bar{V} = \frac{(25 + 26 + 24 + 25 + 26)mL}{5} = 25{,}2\ mL$$

Ese valor debe ser redondeado a 2 cifras significativas: **25 mL**

Agora imos calcular as desviacións. Chamamos **desviación** á diferenza entre cada valor medido e o valor medio. Observa que poden ser + ("medimos de máis") ou – ("medimos de menos"):

V (mL)	V_i-V_M (mL)	|Vi-VM|(mL)
25	0	0
26	1	1
24	-1	1
25	0	0
26	1	1
25		0,6

Agora calculamos a **dispersión** ou **desviación media**.

A dispersión é a media aritmética das desviacións expresadas en valor absoluto:

$$D_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|V_i - \bar{V}| = \mathbf{0,6\ \ mL}$$

Observa: a maior precisión, menor dispersión.

Agora comparamos o resultado coa incertidume da probeta e escollemos como erro absoluto o valor maior:

Incertidume: i=±0,5 mL , Dispersión: D_M= ±0,6 mL

Tomamos erro absoluto: $\mathbf{E_A = \pm 0,6\ mL}$

Polo tanto qualquer resultado debe estar no intervalo:

$(\mathbf{25 \pm 0,6})\boldsymbol{mL}$ ou o que é o mesmo: $(\mathbf{24,4\ ,25,6})\mathbf{mL}$

Agora podemos calcular o erro relativo:

$$E_R = \frac{E_A}{Valor\ real} = \frac{0{,}6\ mL}{25\ mL} = \mathbf{0,024}$$

E a porcentaxe de erro: **2,4%**

NOTA: no laboratorio veremos varios métodos de determinación do erro cometido coa axuda do computador.

Regras para estimar a incertidume en resultados calculados

En moitas ocasións os resultados derivan da combinación de medidas de distintas magnitudes de cada unha das cales coñecemos a incertidume. Para estimar a incertidume do resultado seguimos certas regras.

1.-Para resultados que proveñen da adición ou da sustración de medidas suman-se ou restan-se as incertidumes absolutas:

Se $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}$ enton $\Delta\boldsymbol{y} = \Delta\boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{b}$

2.-Para cantidades que proveñen de multiplicación ou división de medidas, suman-se as incertidumes relativas de cada medida:

Se $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$ enton $\frac{\Delta\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}} = \frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}} + \frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\Delta\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}}$

3.-Para cantidades que proceden dunha potencia de grao $\boldsymbol{n}$:

Se $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}$ enton $\frac{\Delta\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}} = \left|\boldsymbol{n} \cdot \left(\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}\right)\right|$

Magnitudes escalares e vetoriais

- Magnitudes escalares son aquelas que quedan perfeitamente definidas por unha cifra e unha unidade. Por exempro a temperatura (36^{o}C) ou o tempo (3 días) ou a masa (10 kg)
- Magnitudes vetoriais son aquelas que para quedar definidas precisan ademais do anterior:

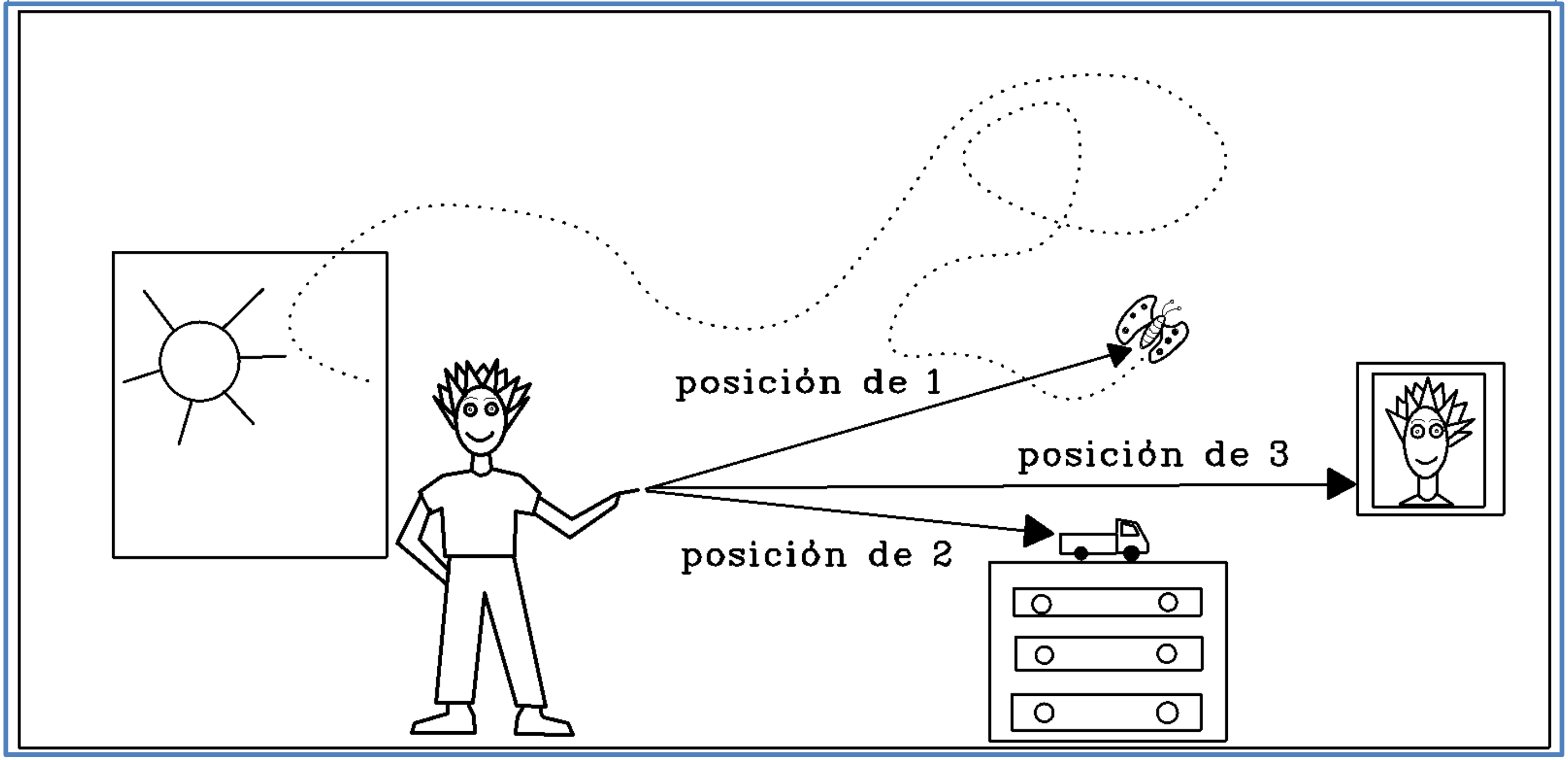
1) **Ponto de aplicación** (onde se aplica)
2) **Direción** na que se aplica.
3) **Sentido** no que se aplica.
4) **Módulo** , a intensidade coa que se aplica.

Por exempro, a posición, a velocidade ou a aceleración e a forza.

As magnitudes vetoriais expresan-se con **vetores**.

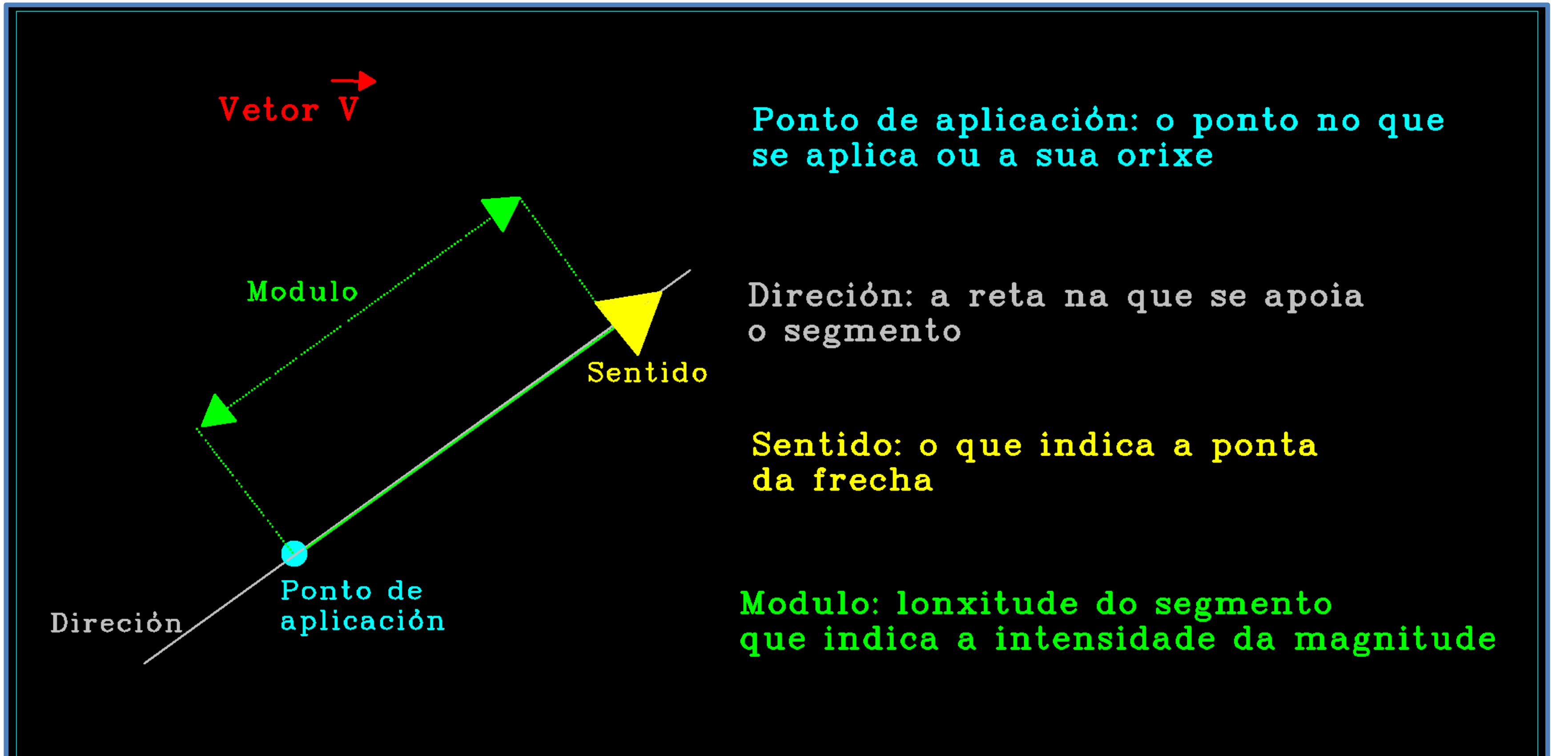
Vetores:representación

Se por exempro queremos determinar a **posición** de corpos a respeito dun ponto, precisaremos indicar distancia, direción e sentido. Esta necesidade tamén se manifesta se queremos determinar a velocidade e outras magnitudes. Para poder responder a esa necesidade, usamos os **vetores**.

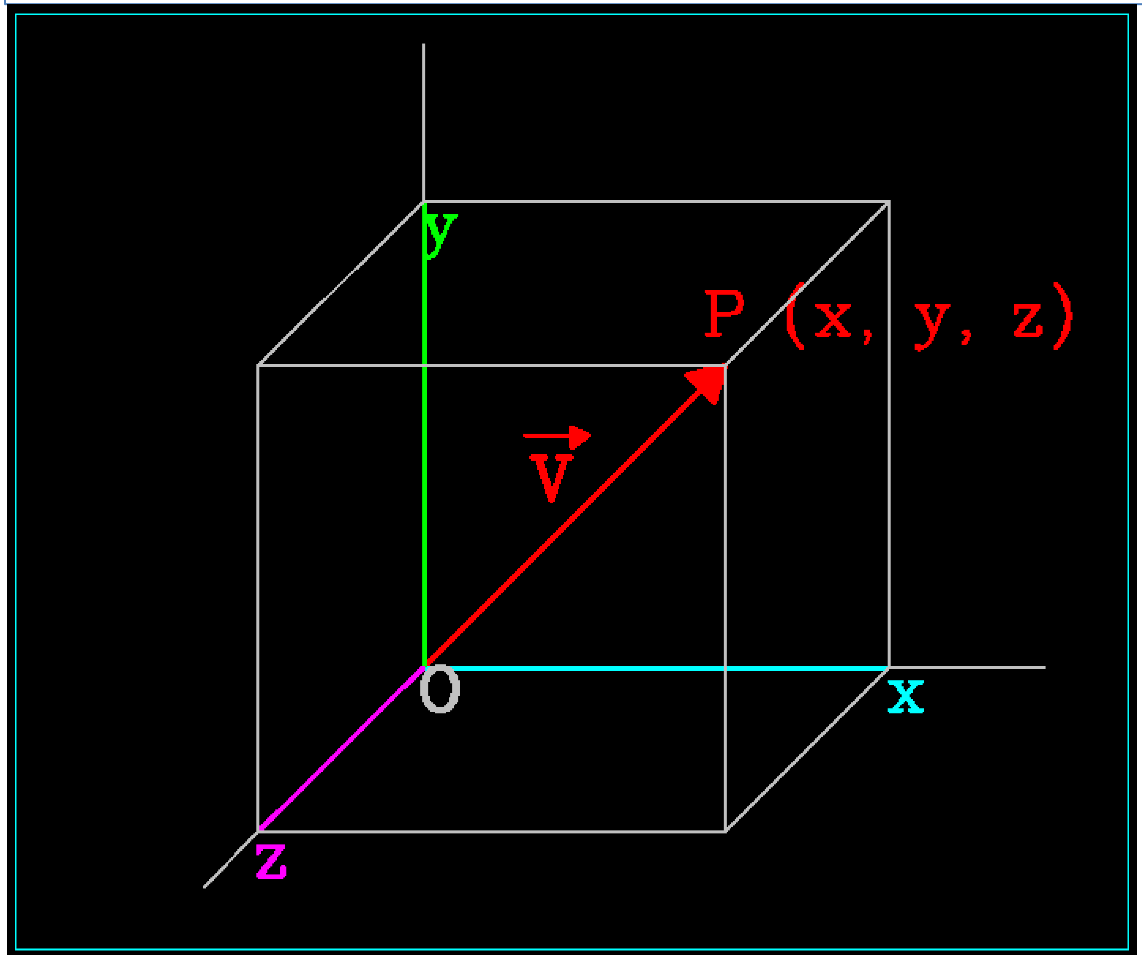


Elementos dun vetor

- Un vetor é un segmento orientado. Normalmente as magnitudes vetoriais representan-se como $\vec{r}\ (posición)$, $\vec{v}\ (velocidade), \vec{a}\ (aceleración)$ ….
- Na figura tes representado un vetor $\vec{V}$ qualquer e os elementos que caraterizan a un vetor.



Representación no espazo dun vetor



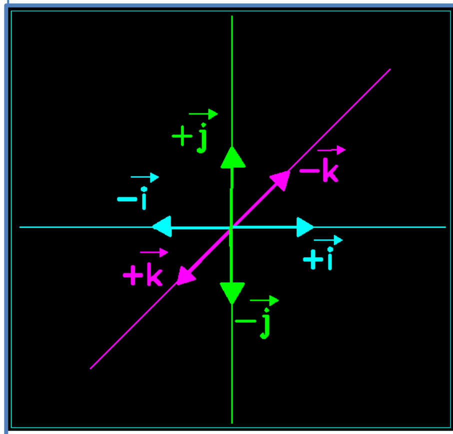
- O vetor $\vec{V}$ está aplicado na orixe, no ponto O.
- O seu módulo ven dado pola lonxitude do segmento que une O co ponto P.
- O módulo do vetor $\vec{V}$ é a lonxitude do segmento $\overline{OP}$ e representamo-lo como V.
- O ponto P ven definido polas coordenadas (x,y,z).
- No ponto O as coordenadas son (0,0,0).
- A coordenada x proporciona a lonxitude do segmento $\overline{OX}$. O mesmo acontece con y e z.

Podemos calcular o valor de V (a lonxitude do segmento $\overline{OP}$ sen máis que aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$V^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

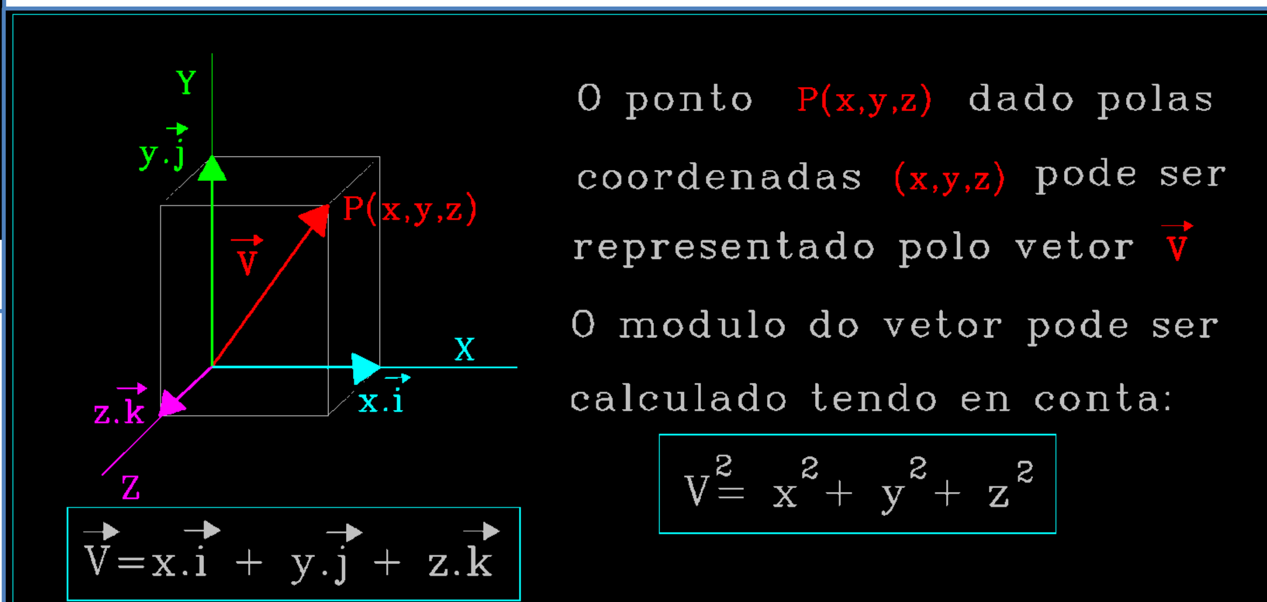
Representación dun vetor con vetores unitarios

Sobre cada un dos eixes de referencia (x,y,z) podemos definir un vetor unitario, é dicer, un vetor de módulo 1 e que ten como direción a reta de cada eixe, e sentido + se aponta á dereita e – se aponta á esquerda:



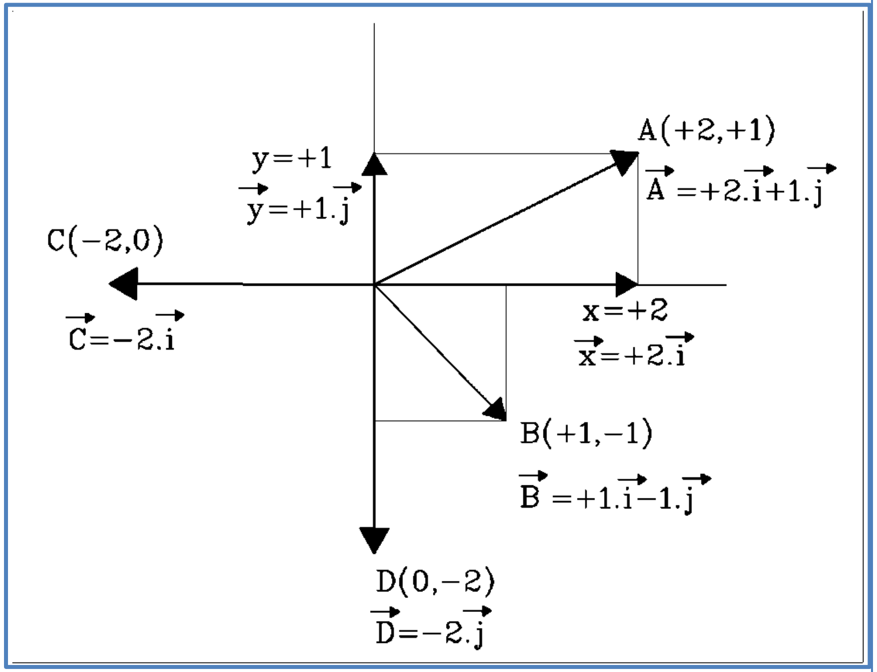
Vetores unitarios

Agora podemos representar cada ponto por un vetor en función dos unitarios :



Vetores no plano

Ao longo deste curso traballaremos con vetores nun plano, é dicer en 1 ou en 2 dimensións. A sua representación fai-se logo máis sinxela:



Na figura podes ver a representación de pontos e de vetores.

Observa con atención o ponto A e as suas coordenadas (+2,+1) .

E logo fíxate no vetor $\vec{\boldsymbol{A}}$ e as suas componentes.

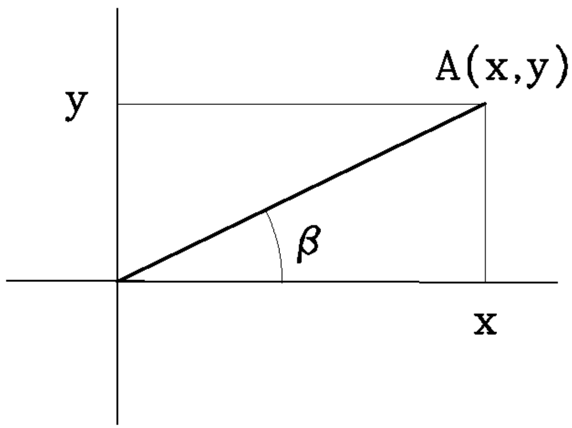
O módulo do vetor $\vec{\boldsymbol{A}}$ será:

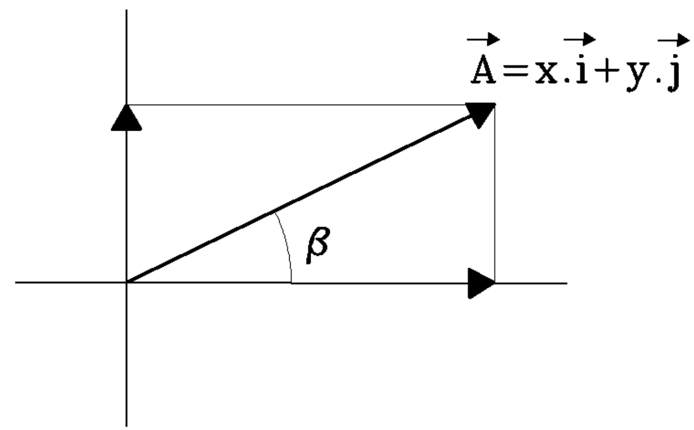
$$A^2 = +2^2 + 1^2 \rightarrow A = |\vec{A}| = \sqrt{5}$$

Estuda os vetores correspondentes a B,C e D e calcula os seus módulos

Relación entre as componentes e o módulo dun vetor

Consideremos a representación en coordenadas e vetorial do ponto A(x,y) e revisemos as relacións trigonométricas:





$$A = |\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

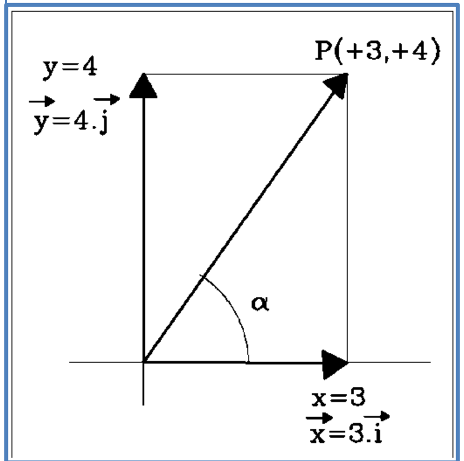
$$tg\,\beta = \frac{y}{x}$$

$$\cos\beta = \frac{x}{A} \longrightarrow x = A.\cos\beta$$

$$sen\,\beta = \frac{y}{A} \longrightarrow y = A.sen\,\beta$$

Polo tanto: $\vec{A} = A \cdot cos\beta \cdot \vec{\imath} + A \cdot sen\beta \cdot \vec{\jmath}$

Exercicio 1: Dado o ponto P(+3,+4) representa-o como ponto e como vetor e calcula o seu módulo e o ángulo que forma co eixe horizontal.

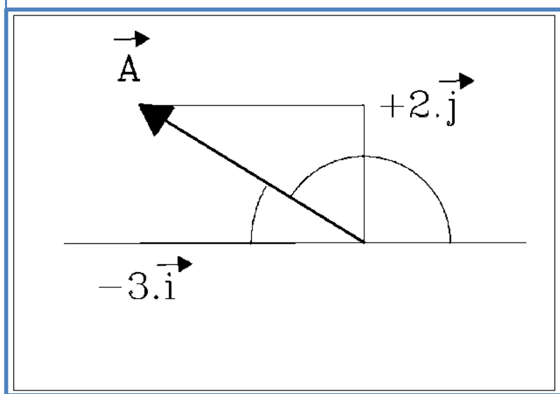


$$\vec{P} = 3 \cdot \vec{\imath} + 4 \cdot \vec{\jmath}$$

$$P = |\vec{P}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\alpha = arctg\frac{4}{3} = 53{,}13°$$

Exercicio 2: Dado o vetor $\vec{A} = -3\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath}$ representa-o, calcula o seu módulo e o ángulo que forma co eixe horizontal.



$$A = |\vec{A}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$tg\theta = \frac{+2}{-3} \rightarrow \theta = -33{,}7°$$

Atención á calculadora!!!

Póde-se expresar o vetor de duas formas:

a)Forma retangular: en función das componentes:

$$\vec{A} = A \cdot cos\beta \cdot \vec{i} + A \cdot sen\beta \cdot \vec{j}$$

b)Forma polar: indicando o seu módulo e o ángulo que forma co eixe horizontal.

Exercicio 3: Un vetor ten un módulo de 35 unidades e forma un ángulo de 40^{o} co eixe horizontal. Calcula as súas componentes e escrebe-o en forma retangular.

$$x = 35 \cdot cos40° = 26{,}8$$

$$y = 35 \cdot sen40° = 22{,}5$$

Polo tanto en forma retangular terá a forma:

$$\vec{r} = 26{,}8\,\vec{i} + 22{,}5\,\vec{j}$$

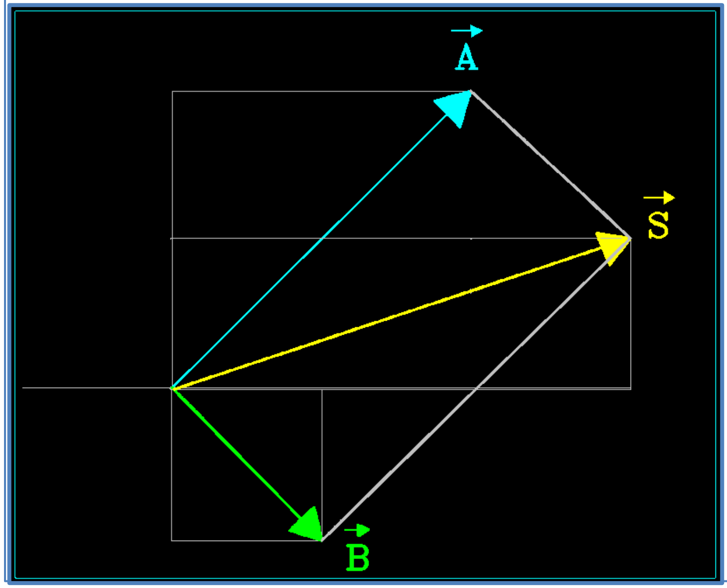
Suma de vetores

Para sumar 2 ou máis vetores, sumamos as suas componentes.

$$\vec{r}_1 = x_1\,\vec{\imath} + y_1\,\vec{\jmath}$$
$$\vec{r}_2 = x_2\,\vec{\imath} + y_2\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (x_1 + x_2)\vec{\imath} + (y_1 + y_2)\vec{\jmath}$$

Exercicio: dados os vetores $\vec{A} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ e $\vec{B} = 1\vec{\imath} - 1\vec{\jmath}$ calcula o vetor resultante da sua suma.



$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = 3\,\vec{\imath} + 1\vec{\jmath}$$

Graficamente a suma é a diagonal maior do paralelogramo formado polos dous vetores.

Observación: a suma é comutativa.

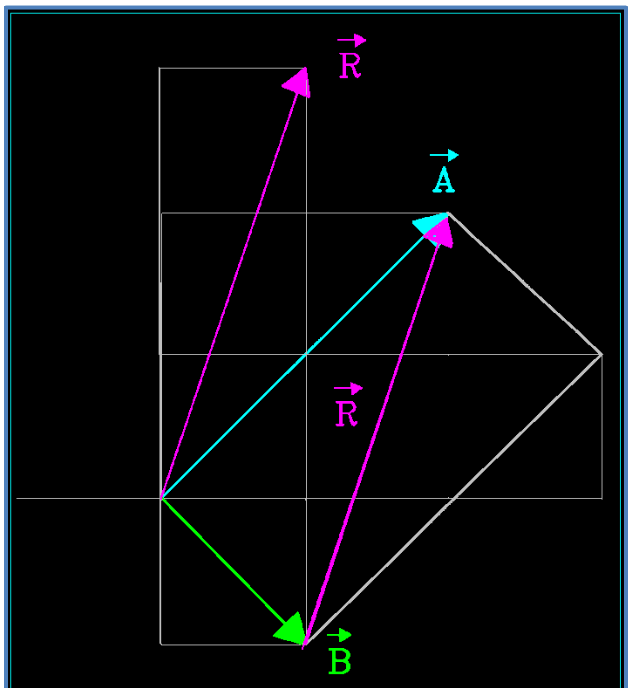
Comproba-o facendo $\vec{B} + \vec{A}$

Sustración ou resta de vetores

Para restar dous vetores, restamos as suas componentes.

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}_1 &= x_1\,\vec{\imath} + y_1\,\vec{\jmath}\\ \vec{r}_2 &= x_2\,\vec{\imath} + y_2\,\vec{\jmath}\end{aligned}\right\}\quad \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (x_1 - x_2)\vec{\imath} + (y_1 - y_2)\vec{\jmath}$$

Resulta evidente que esta operación non é comutativa.



Exercicio: dados os vetores:

$\vec{A} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ e $\vec{B} = 1\vec{\imath} - 1\vec{\jmath}$ calcula o vetor resultante de restar $\vec{A} - \vec{B}$.

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} = 1\,\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$$

Graficamente corresponde-se coa diagonal menor do paralelogramo.

Calcula e representa $\vec{B} - \vec{A}$

Produto dun escalar por un vetor

Cando multiplicamos un escalar por un vetor obtemos un novo vetor multiplo do primeiro. Só compre multiplicar cada componente polo escalar:

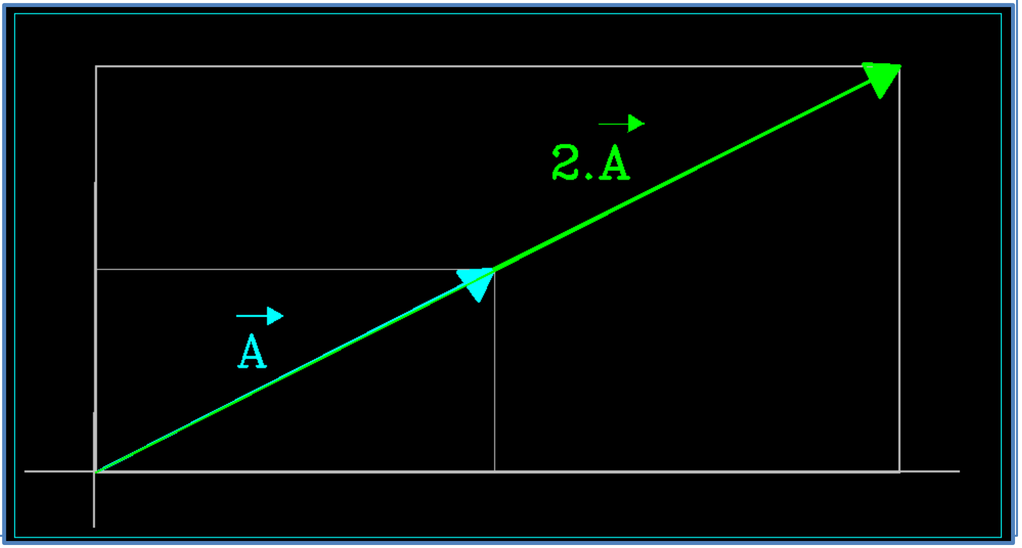
$$n \cdot \vec{r}_1 = n \cdot (x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}) = n \cdot x_1\vec{\imath} + n \cdot y_1\vec{\jmath} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} = \vec{r}_2$$

Resulta evidente que o segundo vetor terá a mesma direción e o mesmo sentido do primeiro.

Exercicio: dado o vetor $\vec{A} = 2\vec{\imath} + 1\vec{\jmath}$, calcula o vetor resultante de multiplicar $2 \cdot \vec{A}$.

O resultado é evidente:

$$2 \cdot \vec{A} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$$



Cociente dun vetor por un escalar

Realmente esta operación está implicita na anterior pois dividir un vetor por un escalar $\boldsymbol{n}$ ven sendo o mesmo que multiplicar o vetor polo escalar $\frac{1}{n}$, en todo caso todo o que compre facer é dividir cada componente do vetor entre o escalar.

$$\frac{\vec{r}_1}{n} = \frac{(x_1\vec{i} + y_1\vec{j})}{n} = \frac{x_1}{n} \cdot \vec{i} + \frac{y_1}{n} \cdot \vec{j} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} = \vec{r}_2$$

Exercicio: divide o vetor $\vec{A} = 50\,\vec{i} - 25\vec{j}$ entre o escalar 15.

$$\frac{\vec{A}}{15} = \frac{50}{15}\vec{i} - \frac{25}{15}\vec{j} = \frac{10}{3}\vec{i} - \frac{5}{3}\vec{j}$$

E o resultado é unha fración do vetor orixinal.

Produto escalar de dous vetores

Dados dous vetores, $\vec{A}$ e $\vec{B}$ definimos o seu produto escalar como o resultado de multiplicar os seus módulos polo coseno do ángulo que forman entre si.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot cos\theta$$

O produto escalar ten as seguintes propiedades:

1.-O resultado é un escalar.

2.-É comutativo.

3.-Cumpre a propiedade distributiva:

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \pm \vec{C}\right) = \vec{A} \cdot \vec{B} \pm \vec{A} \cdot \vec{C}$$

Produto escalar de vetores unitarios

Calculemos o produto escalar do vetor unitario $\vec{\imath}$ consigo mesmo:

$$\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = 1 \cdot 1 \cdot cos0° = 1$$

Resulta evidente que os produtos escalares $\vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath}$ e $\vec{k} \cdot \vec{k}$ teñen o mesmo resultado.

Por outra banda se calculamos o produto:

$$\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = 1 \cdot 1 \cdot cos90° = 0$$

E o mesmo acontecerá co resto dos produtos. Resumamos todo nunha taboa:

.	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$	$\vec{k}$
$\vec{\imath}$	1	0	0
$\vec{\jmath}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Produto escalar de vetores en función de componentes

Imos calcular o produto escalar entre 2 vetores, en función das súas componentes.

Sexan os vetores $\vec{A} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$ e $\vec{B} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$

Imos realizar a operación do produto escalar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}) \cdot (\vec{B} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k})$$

Se aplicamos a propiedade distributiva e facemos uso das regras de produto escalar do apartado anterior resulta que os produtos cruzados dan sempre cero e os outros sempre 1. Polo tanto o resultado será:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Exercicio: calcula o ángulo que forman os vetores $\vec{A} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$ e $\vec{B} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$.

Para calcular o ángulo que forman recorremos ao produto escalar pois:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot cos\theta$ e polo tanto: $cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A\cdot B} \quad (1)$

Calculamos o produto escalar por componentes:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}) \cdot (3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}) = 6 - 12 = -6$$

E calculamos os módulos dos dous vetores:

$$A = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \quad , \qquad \mathrm{B} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

E agora con (1) calculamos o coseno e o ángulo:

$$cos\theta = \frac{-6}{5 \cdot \sqrt{13}} = -0{,}3328 \rightarrow \theta = 109{,}4°$$