Resolución del examen de recuperación del Bloque de Análisis (24-04-2020)

EJERCICIO 1

opción A

(I) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{-\infty}-\frac{1}{-1}=0+1=1$

$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=$ No existe $(\text{Dom}\ln(x)=(0,+\infty))$

(II)

$$f(x)=|x|\,\frac{x-1}{x^2-4}=\begin{cases}\dfrac{-x^2+x}{x^2-4} & \text{si } x\le 0\\[2mm] \dfrac{x^2-x}{x^2-4} & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

$\text{Dom} f=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^2-4\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Estudio de la continuidad:

· En $x=-2$: $\nexists f(-2)$

$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{-x^2+x}{x^2-4}=\frac{-6}{0^+}=-\infty\notin\mathbb{R}$

$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{-x^2+x}{x^2-4}=\frac{-6}{0^-}=+\infty\notin\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ discontinua en $x=-2$

(Discontinuidad de salto infinito)

· En $x=0$: $f(0)=0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x}{x^2-4}=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2+x}{x^2-4}=0$

$\Rightarrow f$ continua en $x=0$

· En $x=2$: $\nexists f(2)$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-x}{x^2-4}=\frac{2}{0^+}=+\infty\notin\mathbb{R}$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x}{x^2-4}=\frac{2}{0^-}=-\infty\notin\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ discontinua en $x=2$

(Discontinuidad de salto infinito)

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}-\{-2,2\}$

· Estudio de la derivabilidad:

· En $x=2$ y en $x=-2$ no es derivable por no ser continua

· En $x=0$:

$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^2-x}{x^2-4}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x-1)}{x(x^2-4)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x^2-4}=\frac{1}{4}$

$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-x^2+x}{x^2-4}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x(x-1)}{x(x^2-4)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-(x-1)}{x^2-4}=-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+)\Rightarrow f$ no es derivable en $x=0$

Por tanto, f es derivable en $\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$

· ASÍNTOTAS

Verticales: $x=2$; $x=-2$ (encontradas al estudiar la continuidad)

Horizontales: $y=1$; $y=-1$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-x}{x^2-4}=1\in\mathbb{R}\Rightarrow y=1$

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x^2+x}{x^2-4}=-1\in\mathbb{R}\Rightarrow y=-1$

Oblicuas: No hay (hay dos horizontales)

EJERCICIO 1

Opción B

(I) $\lim_{x\to 0^+} \left(1+2sen(x)\right)^{1/x} = 1^{+\infty} = IND$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2senx}}\right)^{\frac{1}{2senx}}\right]^{2senx\cdot\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{2senx}{x}} = e^2$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2senx}{x} = \frac{0}{0} = IND \underset{L'Hôp}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0^+}\frac{2\cos x}{1} = 2$$

(II) Condición para la continuidad en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -1^2+a\cdot 1+1 = a \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -x^2+ax+1 = a \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{x-2}+b = 1+b \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{a=1+b}$$

Condición para la derivabilidad en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \underset{\text{f cont. en } x=1}{=} \frac{0}{0} = IND \underset{L'Hôp}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 1^+}\frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \\ f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \underset{\text{f conti en } x=1}{=} \frac{0}{0} = IND \Longrightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to 1^-} -2x+a = -2+a \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{1=-2+a}$$

Por tanto: $\left\{\begin{array}{l} a=1+b \\ 1=-2+a \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} a=3 \\ b=2 \end{array}}$

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} -x^2+3x+1 & \text{si} & x\le 1 \\ -\frac{1}{x-2}+2 & \text{si} & x>1 \end{array}\right.$$

Asíntota vertical: $x=2$

$$\lim_{x\to 2^+} -\frac{1}{x-2}+2 = \frac{-1}{0^+}+2 = -\infty+2 = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} -\frac{1}{x-2}+2 = \frac{-1}{0^-}+2 = +\infty+2 = +\infty$$

Asíntota horizontal: $y=2$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} -x^2+3x+2 = -\infty \notin \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} -\frac{1}{x-2}+2 = 2$$

Asíntota oblicua

$$m = \lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{-x^2+3x+2}{x} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

EJERCICIO 2

Opción A

$$f(x) = \frac{3x^4 - 4x^3}{12} + 2$$

(I) $f'(x) = x^3 - x^2$

$f'(x) = x^2(x-1) = 0 \iff \begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix}$

SIGNO $f'(x) = x^2(x-1)$

	$-$	0	$-$	1	$+$

f crece en $(1, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, 1)$

f tiene un mínimo relativo en $x=1$ (no es absoluto porque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(II) $f'(x) = x^3 - x^2 \Longrightarrow f''(x) = 3x^2 - 2x$

$f''(x) = 0 \iff 3x^2 - 2x = 0 \iff x(3x-2) = 0 \iff x=0,\ x=\frac{2}{3}$

SIGNO

$f''(x) = 3x^2 - 2x$

	$+$	0	$-$	$\frac{2}{3}$	$+$

f convexa en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

f cóncava en $\left(0, \frac{2}{3}\right)$

f tiene puntos de inflexión en $x=0$ y $x=\frac{2}{3}$

(III) f es continua en $[0,6]$ y derivable en $(0,6)$.
Por el Teorema de Lagrange o del Valor Medio del Cálculo Diferencial, existe $c \in (0,6)$ tal que

$\frac{f(6) - f(0)}{6 - 0} = f'(c)$. Es decir, existe $c \in (0,6)$ tal que la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = c$ (cuyo valor es $f'(c)$), es la misma que la pendiente de la recta secante que une $(0, f(0)) = (0,2)$ con $(6, f(6)) = (6, 254)$.
Es decir, existe $c \in (0,6)$ en el que la recta tangente a $y = f(x)$ es paralela a la recta que une $(0,2)$ y $(6,254)$

(IV) $f'(x) = x^3 - x^2$

La recta $y = -2x+1$ tiene pendiente $m = -2$

$f'(x) = -2 \iff x^3 - x^2 = -2 \iff x^3 - x^2 + 2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & & -1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3 - x^2 + 2 = (x+1)(x^2 - 2x + 2)$

$x^3 - x^2 + 2 = 0 \iff (x+1) \cdot (x^2 - 2x + 2) = 0 \iff \left\{ \begin{matrix} x = -1 \\ x^2 - 2x + 2 = 0 \end{matrix} \right.$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \notin \mathbb{R}$

Por tanto, en $x=1$ $f'(-1) = -2$

$f(-1) = \frac{3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1)}{12} + 2 = \frac{31}{12}$

Es decir, la recta tangente buscada es:

$y - f(-1) = -2(x+1) \Longrightarrow y - \frac{31}{12} = -2x - 2 \Longrightarrow \boxed{y = -2x + \frac{7}{12}}$

EJERCICIO 2

Opción B

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(I) $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$p''(x) = 6ax + 2b$

Inflexión en $x=0 \Rightarrow p''(0)=0 \Rightarrow 6a\cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow b=0$

Mínimo relativo en $x=-1 \Rightarrow p'(-1)=0 \Rightarrow 3a-2b+c=0 \xRightarrow{b=0} 3a+c=0$

En $x=2$, $p'(2)=-9 \Rightarrow 12a+4b+c=-9 \xRightarrow[b=0]{} 12a+c=-9$

Si la recta $y=-9x+14$ es tangente a la función en $x=2$, entonces el punto $(x,y)=(2,-9\cdot 2+14)=(2,-4)$ es de la función:

$p(2)=-4 \Rightarrow 8a+4b+2c+d=-4 \xRightarrow[b=0]{} 8a+2c+d=-4$

Hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3a+c=0 \\ 12a+c=-9 \\ 8a+2c+d=-4 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} 3a+c=0 \\ 12a+c=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow 9a=-9 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=3 \end{cases}$$

$8a+2c+d=-4 \Rightarrow -8+6+d=-4 \Rightarrow d=-2$

Por tanto, $a=-1$, $b=0$, $c=3$, $d=-2$

(II) $p(x) = -x^3+3x-2$ es continua en $[-3,0]$, con $p(-3)=27-9-2>0$ y $p(0)=-2<0$. Por tanto, por el Teorema de Bolzano, existe un $c \in (-3,0)$ tal que $p(c)=0$.

Supongamos que existiese otro punto $d \in (-3,0)$ en el cual $p(d)=0$ (y supongamos sin pérdida de generalidad que $c<d$). Entonces tendríamos p continua en $[c,d]$, derivable en (c,d), con $p(c)=p(d)$. Por el Teorema de Rolle, existirá $z \in (c,d)$ tal que $p'(z)=0$.

Es decir, si consiguiésemos demostrar que $p' \neq 0$ $\forall x \in (-3,0)$, podríamos demostrar que entonces no existe d porque p' nunca se anula.

En este caso $p'(x) = -3x^2+3x=0 \iff x=\pm 1$. Pero $x=-1 \in (-3,0)$

Esto arruina nuestra estrategia para demostrar la unicidad de c

Pero podemos estudiar la monotonía de p en $(-3,0)$

SIGNO p': -3 (−) -1 (+) 0

Es decir, p decrece en $(-3,-1)$, y crece en $(-1,0)$

- Como $p(-3)>0$ y $p(-1) = -(-1)^3+3\cdot(-1)-2=-4<0$, por el Teorema de Bolzano, hay una raíz en $(-3,-1)$. Por lo que explicamos antes, dado que p' no se anula en $(-3,-1)$, en $(-3,-1)$ dicha raíz es única

- Como $p(-1)<0$ y $p(0)<0$, y además p crece en $(-1,0)$, entonces $p(-1) \leq p(x) \leq p(0) < 0$ $\forall x \in (-1,0)$. Es decir, p nunca se anula en $(-1,0)$.

Por tanto, existe una raíz única en $[-3,0]$

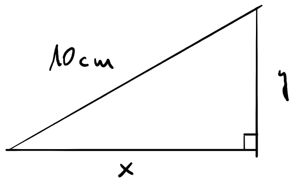
(III) La recta $y+x+1=0$ tiene pendiente -1

$p(x)=x^3-3x^2+2x \Longrightarrow p'(x)=3x^2-6x+2=-1 \Longleftrightarrow 3x^2-6x+3=0 \Longleftrightarrow x^2-2x+1=0$
$\Longleftrightarrow x=1$

Como $p(1)=0$, entonces dicha recta tangente es

$y-p(1)=-1(x-1) \Longrightarrow \boxed{y=-x+1}$

EJERCICIO 3
Opción A



$x^2+y^2=100$

$A(x,y)=xy \Longrightarrow A(x)=x\sqrt{100-x^2}$ $\quad$ $\text{Dom}A=[0,10]$

$y=\sqrt{100-x^2}$

$A'(x)=\sqrt{100-x^2}+x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}$

$A'(x)=\sqrt{100-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\dfrac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

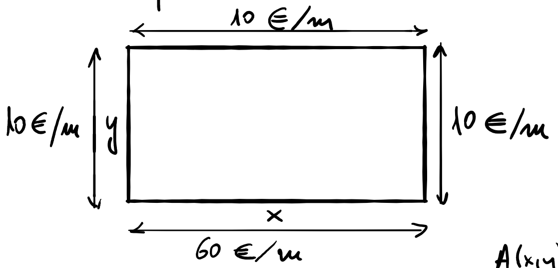
$A'=0 \Longleftrightarrow 100-2x^2=0 \Longleftrightarrow x=\pm 5\sqrt{2}$

SIGNO A': $\quad -\quad (-5\sqrt{2}) \quad (0) \quad + \quad (5\sqrt{2}) \quad - \quad (10)$

En $x=5\sqrt{2}$ cm A tiene un máximo $\Longrightarrow y=\sqrt{100-50}=5\sqrt{2}$ cm

Los dos catetos del triángulo tienen longitud $5\sqrt{2}$ cm

EJERCICIO 3
Opción B



$10y+10x+10y+60x=28800$

$20y+70x=28800$

$2y+7x=2880$

$y=\dfrac{2880-7x}{2}$

$A(x,y)=xy \Rightarrow A(x)=\dfrac{2880x-7x^2}{2}$

$A'(x)=\dfrac{2880-14x}{2}=1440-7x=0 \Longleftrightarrow x=\dfrac{1440}{7}=205'7\,m$

SIGNO A': $\quad (0) \quad + \quad (205'7) \quad -$

En $x=205'7\,m$ la función tiene un máximo. Las dimensiones de la región son $x=205'7\,m$, e

$y=720\,m$

EJERCICIO 4

Opción A

(I) a) $\int \frac{2x+1}{x^2(x+4)}dx = \int \frac{7/16}{x}dx + \int \frac{1/4}{x^2} + \int \frac{-7/16}{x+4} = \frac{7}{16}\ln|x| - \frac{1}{4x} - \frac{7}{16}\ln|x+4| + C$

$\frac{2x+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4}$

$2x+1 = Ax(x+4) + B(x+4) + Cx^2$

$x=0 \Rightarrow 1 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

$x=-4 \Rightarrow -7 = 16C \Rightarrow C = -\frac{7}{16}$

$x=-2 \Rightarrow -3 = -4A + 2\cdot\frac{1}{4} - \frac{7}{16}\cdot 4$

$-3 = -4A - \frac{5}{4} \Rightarrow 12 = 16A + 5 \Rightarrow A = \frac{7}{16}$

b) $\int (x^2+1)e^x dx = (x^2+1)e^x - \int 2xe^x dx = (x^2+1)e^x - \left[2xe^x - \int 2e^x dx\right] =$

$u = x^2+1 \rightarrow du = 2x\,dx$ $\quad$ $u = 2x \rightarrow du = 2dx$

$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$ $\quad$ $dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$

$= (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x = (x^2-2x+3)e^x + C$

(II) 1º) Calculamos los puntos de intersección entre la curva y la recta

$\begin{cases} y = x^3 - 6x \\ y = -2x \end{cases} \Rightarrow x^3 - 6x = -2x \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{cases}$

2º) Ahora hay que saber qué función está por encima:

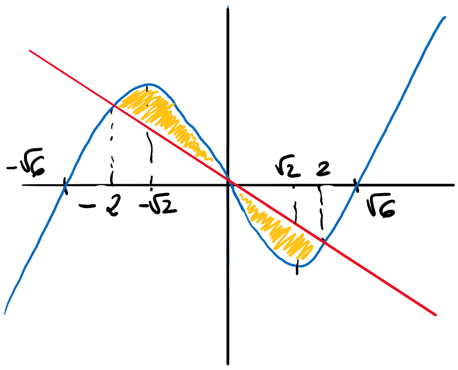
$f(x) = x^3 - 6x \quad g(x) = -2x$

En $x \in (-2,0)$: $\left.\begin{array}{l} f(-1) = 5 \\ g(-1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f > g$ $\quad\Big\|\quad$ En $x \in (0,2)$: $\left.\begin{array}{l} f(1) = -5 \\ g(1) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow f < g$

Si se quiere hacer un esbozo de la curva:

$y = x^3 - 6x \rightarrow$ Pts corte ejes: $(0,0), (\sqrt{6},0), (-\sqrt{6},0)$

$y' = 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ $\quad$ SIGNO y': $+$ $-\sqrt{2}$ $-$ $\sqrt{2}$ $+$



$\text{ÁREA} = \int_{-2}^{0} x^3 - 6x - (-2x)dx + \int_0^2 -2x - (x^3 - 6x)dx =$

$= \int_{-2}^{0} x^3 - 4x\,dx + \int_0^2 4x - x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 =$

$= -(4-8) + 8 - 4 = 8\,u^2$

EJERCICIO 4

Opción B

(I) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1\\ \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos(2x)\end{array}\right\} \Rightarrow 2\cos^2 x = 1+\cos(2x)$$

Otra forma es resolver la integral por partes:

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x\cdot\cos x\,dx = \cos x\cdot\operatorname{sen}x + \int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \cos x\operatorname{sen}x + \int 1-\cos^2 x\,dx$$

$u = \cos x \longrightarrow du = -\operatorname{sen}x\,dx$

$dv = \cos x\,dx \longrightarrow v = \operatorname{sen}x$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x\,dx = \cos x\cdot\operatorname{sen}x + \int 1\,dx - \int \cos^2 x\,dx \Rightarrow 2\int\cos^2 x\,dx = \cos x\operatorname{sen}x + x$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x\,dx = \frac{\cos x\cdot\operatorname{sen}x}{2} + \frac{x}{2} + C \Rightarrow \int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx = \left[\frac{\cos x\operatorname{sen}x}{2} + \frac{x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

(II) $\displaystyle\int x^2\ln(x+1)\,dx = \frac{x^3}{3}\cdot\ln(x+1) - \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x+1}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\left[\int x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\,dx\right] =$

$u = \ln(x+1) \longrightarrow du = \dfrac{dx}{x+1}$

$dv = x^2\,dx \longrightarrow v = \dfrac{x^3}{3}$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x+1 \\ \hline -x^3 - x^2 & x^2 - x + 1 \\ \quad\; -x^2 & \\ \quad\; x^2 + x & \\ \qquad\quad x & \\ \qquad -x-1 & \\ \qquad\quad -1 & \end{array}$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1|\right] = \frac{x^3+1}{3}\ln|x+1| - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + C$$

(III) $f(t) = \dfrac{e^{t^2}}{t^2+1}$ es una función continua en $\mathbb{R}$, por tanto, es continua en el intervalo que contenga a 0. Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, la función $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ es derivable, con $F'(x) = f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Por tanto, $F'(0) = f(0) = \dfrac{e^{0^2}}{0^2+1} = 1$

La recta tangente tiene por ecuación

$$y - F(0) = F'(0)(x-0) \Rightarrow y - 0 = 1\cdot(x-0) \Rightarrow \boxed{y = x}$$

$F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$

(III) $y = \sqrt{2x+1} \geq 0 \quad \forall x\in[0,4]$

$$\text{ÁREA} = \int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 2(2x+1)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(2x+1)^{1/2+1}}{1/2+1}\right]_0^4 = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\cdot(2x+1)^{3/2}\right]_0^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 9^{3/2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}\,u^2$$