IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas I
31-03-2020. Tiempo estimado: 60 minutos

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x^2+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}} = 1^{+\infty} = IND.$ *(Indeterminación del número e)*

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x^2+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x^2+1+x^2+2-x^2-2}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+}\left(1+\frac{x^2-1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+2}{x^2-1}}\right)^{\frac{x^2+2}{x^2-1}}\right]^{\frac{x^2-1}{x^2+2}\cdot\frac{1}{x^2-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{(x^2+2)(x^2-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2+2}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \frac{0}{0} = IND$ *(Puede hacerse utilizando la Regla de L'Hôpital, o multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión con radicales)*

Si lo resolvemos usando la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{1} = \frac{4}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Si lo resolvemos multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada de los radicales:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Solución del ejercicio 2

a) $\displaystyle f'(x) = \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x+3}}$

b) $\displaystyle f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{2x+1}}\cdot\frac{1\cdot(2x+1)-2\cdot(x-1)}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1}{x-1}\cdot\frac{2x+1-2x+2}{(2x+1)^2} = \frac{3}{(2x+1)(x-1)}$

c) $f'(x) = 6(x-1)^5\cdot e^{-x^2+3x} + (x-1)^6\cdot(-2x+3)e^{-x^2+3x}$

d) $\displaystyle f'(x) = \frac{2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)(1-\cos(x)) - \mathrm{sen}^3(x)}{(1-\cos(x))^2}$

Solución del ejercicio 3

a) *El dominio de la función es* $Dom\, f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

La función es continua al menos en $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

- *En* $x=0$*:*

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=e^0=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x-1=-1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} f \text{ discontinua en } x=0 \\ \text{Disc. salto finito} \end{array}$$

- *En* $x=1$*:*

$$\left.\begin{array}{l} \nexists\, f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x-1=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} f \text{ discontinua en } x=1 \\ \text{Disc. salto infinito} \end{array}$$

  Por tanto, f *es continua en* $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

b) Cálculo de asíntotas:

- *Asíntotas verticales.*
  Al estudiar la continuidad se encontró la asíntota vertical de ecuación $x=1$
- *Asíntotas horizontales:* $y=0$ *(a la izquierda de la representación gráfica).*

$$\lim_{x\to -\infty} e^x=0 \Longrightarrow y=0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x-1}=+\infty$$

- *Asíntotas oblícuas:* $y=x+1$
  Solo se buscan a la derecha de la representación gráfica.

$$m=\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x(x-1)}=1\in\mathbb{R}$$

$$n=\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-1}=1\in\mathbb{R}$$

Solución del ejercicio 4 *Dada la función* $f(x)=e^{x^3-x}$*, estudiar la monotonía y la existencia de extremos absolutos y relativos.*

- $f'(x)=(3x^2-1)e^{x^3-x}=0 \Longleftrightarrow 3x^2-1=0 \Longleftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

  Además $f'>0$ *en* $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$*, y* $f'<0$ *en* $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- *Por tanto,* f *crece en* $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$*, y* f *decrece* $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- f *tiene un máximo relativo en* $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$*, y un mínimo relativo en* $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$
- *Para saber si los extremos relativos son absolutos, como el dominio de la función es* $\mathbb{R}$ *no habrá asíntotas verticales, y lo único que tenemos que comprobar son los límtes cuando* $x\to+\infty$ *y* $x\to-\infty$*:*

  $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^3-x}=+\infty \Longrightarrow f$ *no tiene máximo absoluto*

  $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3-x}=0 \Longrightarrow f$ *no tiene mínimo absoluto, ya que* $f(x)>0\;\forall x\in\mathbb{R}$

Solución del ejercicio 5

a) *La función es derivable al menos en* $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$.

- *En* $x=0$*:*

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=3 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x+3=3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+2x=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ discontinua en } x=0 \Longrightarrow \nexists f'(0)$$

- *En* $x=2$*:*

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=8 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2+2x=8 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 6x-4=8 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{continua en } x=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+2x-8}{x-2}=\dfrac{0}{0}\overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x+2}{1}=6 \\ \\ f'(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{6x-4-8}{x-2}=\dfrac{0}{0}\overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{6}{1}=6 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f \text{ derivable en } x=2$$

Por tanto, f *es derivable en* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

b) *En* $(0,2)$*,* $f'(x)=2x+2$.

La recta tangente a la función en $x=1$ *tiene ecuación* $y-f(1)=f'(1)(x-1)$*:*

$$f(1)=3,\ f'(1)=4 \Longrightarrow y-3=4(x-1) \Longrightarrow y=4x-1$$

c) *En* $(0,2)$*:* $f'(x)=2x+2 \Longrightarrow f''(x)=2>0 \Longrightarrow f$ *es convexa en* $(0,2)$

Solución del ejercicio 6 *Si* x *e* y *son las dimensiones del rectángulo, como la diagonal mide 10 cm, se cumple* $x^2+y^2=100 \Longrightarrow y=\sqrt{100-x^2}$
El área del rectángulo en función de x *es* $A(x)=x\sqrt{100-x^2}$ *(función objetivo):*

$$A'(x)=\sqrt{100-x^2}+\frac{x(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}}=\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-2x^2}}$$

$$A'(x)=0 \Longleftrightarrow 100-2x^2=\Longleftrightarrow x^2=50 \Longleftrightarrow x=\pm 5\sqrt{2}$$

En un problema de geometría, no podemos aceptar una distancia negativa. Así que, la única solución que tendría sentido aquí es $x=5\sqrt{2}$.

El problema no está terminado si no se demuestra que en $x=5\sqrt{2}$ *la función objetivo tiene un máximo relativo:*

- El signo de A' *solo depende del signo de* $100-2x^2$. *Como en* $x=5\sqrt{2}$ *el signo de* A' *pasa de ser positivo a negativo, entonces, en* $x=5\sqrt{2}$ A *alcanza su máximo.*

- El rectángulo resulta ser un cuadrado de lado $5\sqrt{2}$ *cm.*