IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas II
25-03-2020. Tiempo estimado: 90 minutos

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

a) *Sea* $\overrightarrow{v}=(a,b,c)$, *con* $|\overrightarrow{v}|=1$:

I) $|\overrightarrow{v}|=1 \implies a^2+b^2+c^2=1^2$

II) $\angle(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})=30^\circ \implies \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}=|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|\cos 30^\circ \implies a+b+c=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

III) $\angle(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=45^\circ \implies \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}=|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|\cos 45^\circ \implies 2a+2c=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2=1 \\ a+b+c=\frac{3}{2} \\ 2a+2c=2 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2=1 \\ 2a+2b+2c=3 \\ 2a+2c=2 \end{array}\right. \overset{F_2-F_3\to F_2}{\implies} b=\frac{1}{2} \implies \left\{\begin{array}{l} a^2+\frac{1}{4}+c^2=1 \\ \\ 2a+2c=2 \end{array}\right.$$

$$\implies \left\{\begin{array}{l} a^2+c^2=\frac{3}{4} \\ \\ a+c=1 \end{array}\right. \overset{a=1-c}{\implies} (1-c)^2+c^2=\frac{3}{4} \implies 2c^2-2c+\frac{1}{4}=0 \implies 8c^2-8c+1=0$$

$$\implies c=\frac{8\pm 4\sqrt{2}}{16}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{4} \implies a=\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Es decir, tenemos dos soluciones:

$$\overrightarrow{v_1}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right),\ \overrightarrow{v_2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

b) *Podemos aprovechar las propiedades del producto vectorial:*

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\times(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})+\overrightarrow{v}\times(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{v}$$

Como $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ *y* $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}$, *entonces:*

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\times(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=2\,\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u} \implies |(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\times(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})|=2|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}|$$

$$\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{K} \\ -1 & 0 & \alpha \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=(0,4-2\alpha,0) \implies |\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}|=|4-2\alpha|$$

Por tanto:

$$|(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\times(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})|=4 \iff |\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}|=2$$

Y finalmente:

$$|4-2\alpha|=2 \iff 4-2\alpha=\pm 2 \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha=1 \\ \alpha=3 \end{array}\right.$$

- *Observación: Si no se utilizan las propiedades del producto vectorial, el problema sale igual, resolviendo directamente:*

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\times(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -3 & 0 & 4+\alpha\\ -1 & 0 & 4-\alpha\end{vmatrix}=(0,-4\alpha+8,0)$$

Y ahora,

$$|(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\times(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})|=4 \Longleftrightarrow |-4\alpha+8| =\Longleftrightarrow -4\alpha+8=\pm 4 \Longleftrightarrow \begin{cases}\alpha=1\\ \alpha=3\end{cases}$$

c) Por las propiedades del producto mixto se tiene:

$$[2\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}-3\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=2[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}-3\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=2[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}]-2[\overrightarrow{u},3\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=-6[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=-12$$

Por tanto, el volumen pedido es

$$V=|[2\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}-3\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]|=12\,u^3$$

Solución del ejercicio 2

a) El vector normal a π_1 es $\overrightarrow{n_1}=(1,1,-1)$, y el vector normal a π_2 es $\overrightarrow{n_2}$, que se obtiene como producto vectorial de los vectores directores del plano $\overrightarrow{v_1}=(1,1,-1)$ y $\overrightarrow{v_2}=(1,3,0)$.

Es decir, $\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=(3,-1,2)$

Como $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ no son proporcionales, los planos no son paralelos. Es decir, se cortan en una recta.

El ángulo que forman los planos se deduce de $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}$ (ver figura 1):

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|\cos\alpha,\quad \textit{con } \alpha=\angle(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})$$

$$3-1-2=0 \implies \alpha=90^\circ$$

Es decir, $\pi_1\perp\pi_2$

b) Ver figura 2.

I) Calculamos la recta r perpendicular a pi_1 que pasa por P. Esa recta tendrá por vector director a $\overrightarrow{n_1}$. Es decir, $r:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1-\lambda\end{cases}$

II) Calculamos el punto $Q=\pi_1\cap r$:

$Q\in r \implies Q=(1+\lambda,1+\lambda,1-\lambda)$

$Q\in\pi \implies 1+\lambda+1+\lambda-(1-\lambda)+2=0 \implies \lambda=-1 \implies Q=(0,0,2)$

III) El punto simétrico de P respecto de π, $P'=(x,y,z)$, cumple $\overrightarrow{PP'}=2\overrightarrow{PQ}$:

$$\left.\begin{array}{l}x-1=2(0-1)\\ y-1=2(0-1)\\ z-1=2(2-1)\end{array}\right\}\implies \left.\begin{array}{l}x=-1\\ y=-1\\ z=3\end{array}\right\}\implies P'=(-1,-1,3)$$

Solución del ejercicio 3

a) *La recta r pasa por $R=(0,1,1)$ con vector director $\overrightarrow{u_r}=(0,-1,3)$.*

La recta s pasa por $S=(-4,2,0)$ con vector director $\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=(0,1,1)$

Como $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ no son proporcionales, las rectas se cortan o se cruzan. Para decidir cuál es el caso, estudiamos si son o no coplanarios los vectores $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_s}$, y $\overrightarrow{RS}$ (ver figura 3):

$$[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{RS}]=\begin{vmatrix}0 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ -4 & 1 & -1\end{vmatrix}=16\neq 0 \Longrightarrow \quad \textit{vectores no coplanarios}$$

Por tanto, r y s se cruzan.

Cuando las rectas se cruzan, la distancia entre ellas es $d(r,s)=\dfrac{|[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{RS}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}$ *(ver figuras 4 y 5)*

$$\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-4,0,0) \Longrightarrow |\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=4$$

Es decir $d(r,s)=\dfrac{16}{4}=4$

b) *Obtendremos la recta t mediante la intersección de los planos π_r y π_s (ver figura 6), donde:*

- *π_r es el plano que pasa por Q y contiene a r:*
  Para cualquier punto $P=(x,y,z)$ del plano se verifica que $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{u_r}$.
  Es decir,

$$\pi_r:\begin{vmatrix}x+2 & y-1 & z-3\\ -2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 3\end{vmatrix}=0 \Longleftrightarrow \pi_r: 2(x+2)+6(y-1)+2(z-3)=0 \Longleftrightarrow$$

$$\pi_r: x+3y+z-4=0$$

- *π_s es el plano que pasa por Q y contiene a s:*
  Para cualquier punto $P=(x,y,z)$ del plano se verifica que $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QS}$ y $\overrightarrow{u_s}$.
  Es decir,

$$\pi_s:\begin{vmatrix}x+2 & y-1 & z-3\\ -2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0 \Longleftrightarrow \pi_s: 4(x+2)+2(y-1)-2(z-3)=0 \Longleftrightarrow$$

$$\pi_s: 2x+y-z+6=0$$

  Por tanto

$$t:\left\{\begin{array}{l} x+3y+z-4=0\\ 2x+y-z+6=0\end{array}\right.$$

Solución del ejercicio 4

a) *Para que una recta y un plano sean paralelos es necesario y suficiente que el vector director de la recta, y el vector normal al plano, sean perpendiculares.*

El vector director de r *es* $\overrightarrow{u_r}=(2,6,-4)$. *Por comodidad podemos tomar* $\overrightarrow{u_r}=(1,3,-2)$

El vector normal al plano es $\overrightarrow{n}=(5,a,4)$

$$r \parallel \pi \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{n} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n}=0 \Longleftrightarrow 5+3a-8=0 \Longleftrightarrow a=1$$

Cuando una recta r *y un plano* π *son paralelos, se tiene que* $d(r,\pi)=d(P,\pi)$, *siendo* $P\in r$.

En nuestro caso, tomando $P=(0,2,2)\in r$:

$$d(r,\pi)=\frac{|\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|},\quad Q\in\pi$$

O utilizando la expresión analítica equivalente:

$$d(P,\pi)=\frac{|5\cdot 0+1\cdot 2+4\cdot 2-5|}{\sqrt{5^2+1^2+4^2}}=\frac{5}{\sqrt{42}}=\frac{5\sqrt{42}}{42}\,u$$

b) *Si* $a=0$, *el vector normal al plano es* $\overrightarrow{n}=(5,0,4)$. *Entonces:*

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u_r}=|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{u_r}|\cos\angle(\overrightarrow{n},\overrightarrow{u_r}) \implies -3=\sqrt{41}\sqrt{14}\cos\angle(\overrightarrow{n},\overrightarrow{u_r}) \implies$$

$$\angle(\overrightarrow{n},\overrightarrow{u_r})=arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{14}}\cdot\sqrt{41}\right)=97.19^\circ$$

Esto quiere decir, que el ángulo que forman la dirección perpendicular al plano π *con la recta* r *es* $180^\circ-97.19^\circ=82.81^\circ$

El ángulo que forman la recta y el plano es el complementario del anterior. Es decir:

$$\angle(r,\pi)=90^\circ-82.81^\circ=7.19^\circ$$

c) *Las ecuaciones paramétricas de la recta* s *son* $s:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1+2\lambda\end{cases}$

Por otra parte, $d(P,r)=\dfrac{|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}$, $\quad A\in r$ *Tomando* $A=(0,2,2)$:

$$\frac{|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\sqrt{\frac{3}{14}}\Longleftrightarrow|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{u_r}|=\sqrt{\frac{3}{14}}\overrightarrow{u_r}=\sqrt{3}$$

Como $P=(1+\lambda,\lambda,1+2\lambda)$

$$\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 1+\lambda&\lambda-2&2\lambda-1\\ 1&3&-2\end{vmatrix}=(-8\lambda+7,1+4\lambda,2\lambda+5) \implies |\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{u_r}|=\sqrt{84\lambda^2-84\lambda+75}$$

$$|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{u_r}|=\sqrt{3}\Longleftrightarrow 84\lambda^2-84\lambda+75=3\Longleftrightarrow 84\lambda^2-84\lambda+72=0\Longleftrightarrow 7\lambda^2-7\lambda+6=0$$

$$\lambda=\frac{7\pm\sqrt{49-162}}{14}\not\in\mathbb{R}$$

Por tanto, no existe ningún punto cumpliendo la condición.

Imágenes de los ejercicios

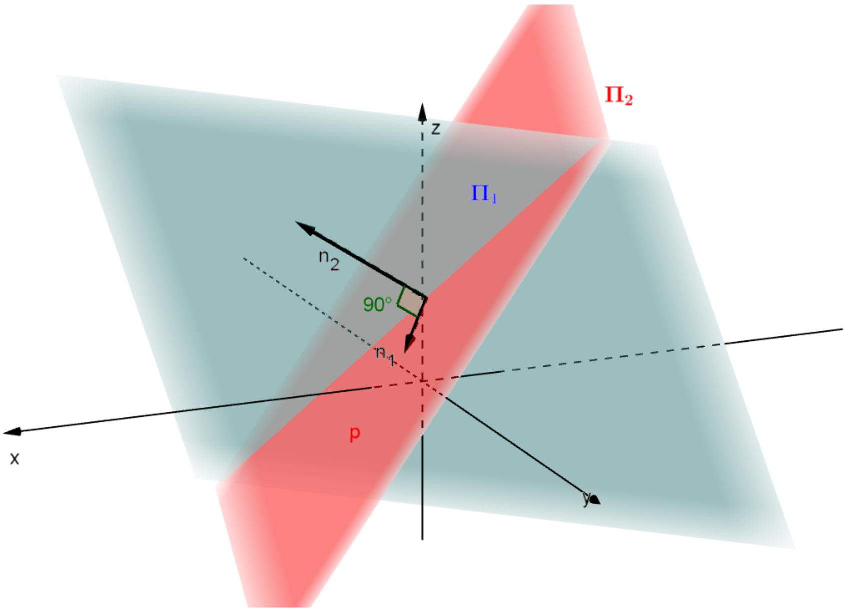

Figura 1: Ejercicio 2a). Ángulo entre dos planos

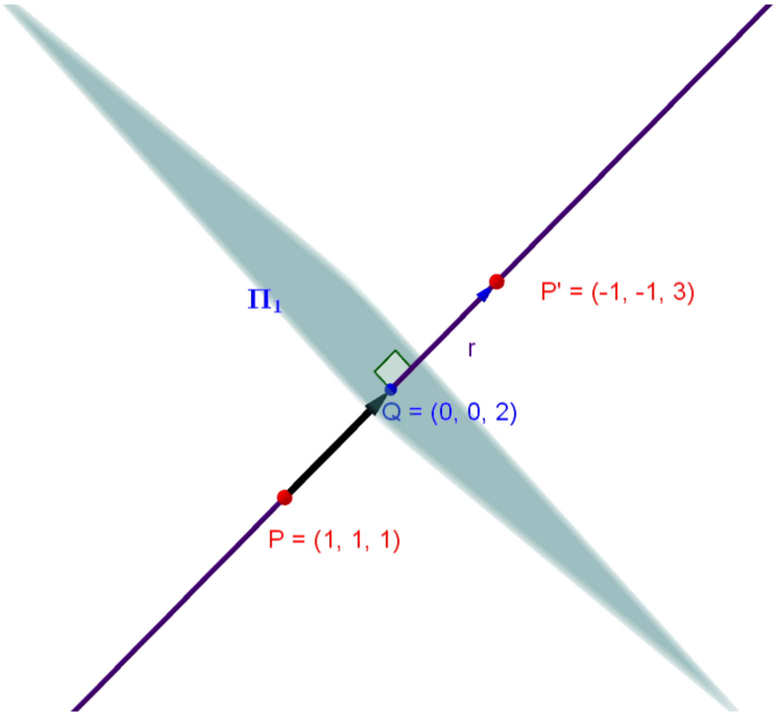

Figura 2: Ejercicio 2b) Cálculo de un punto simétrico respecto de un plano

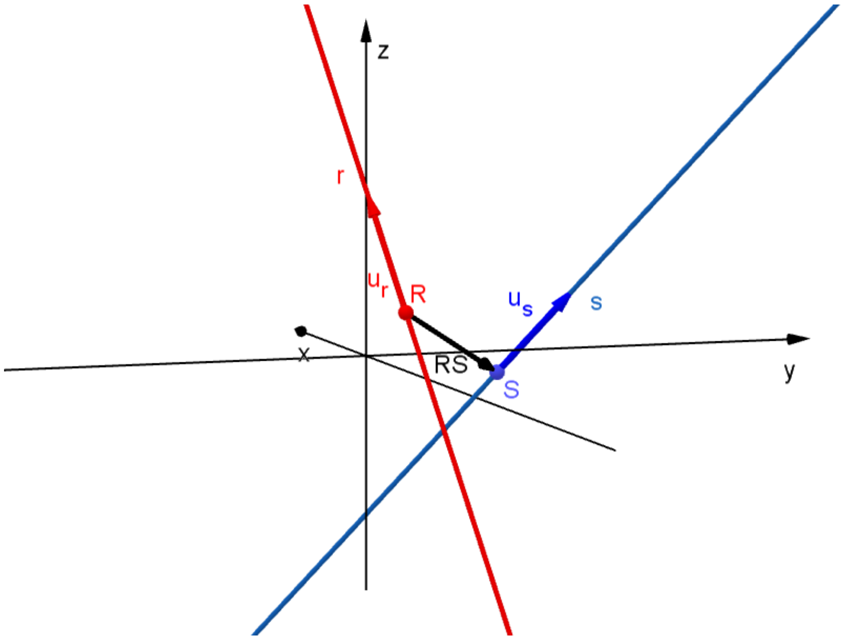

Figura 3: Ejercicio 3a) Rectas r y s que se cruzan

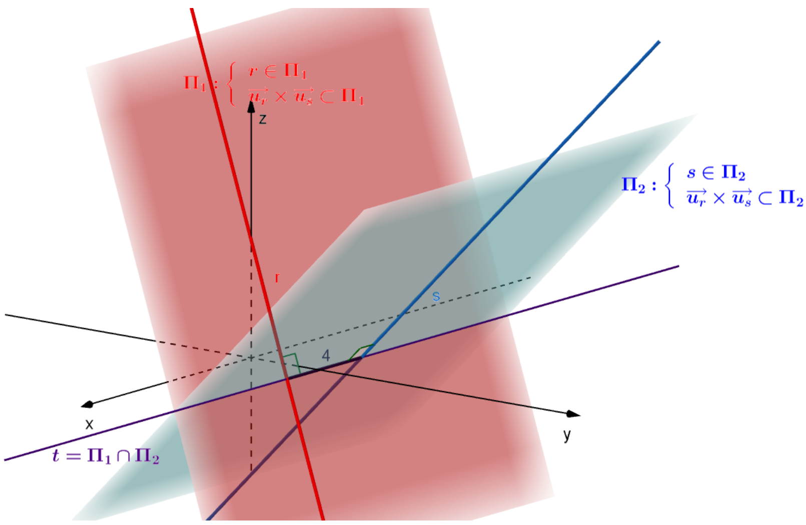

Figura 4: Ejercicio 3a) Construcción de la recta t perpendicular común a r y s (no era necesario para calcular $d(r, s)$)

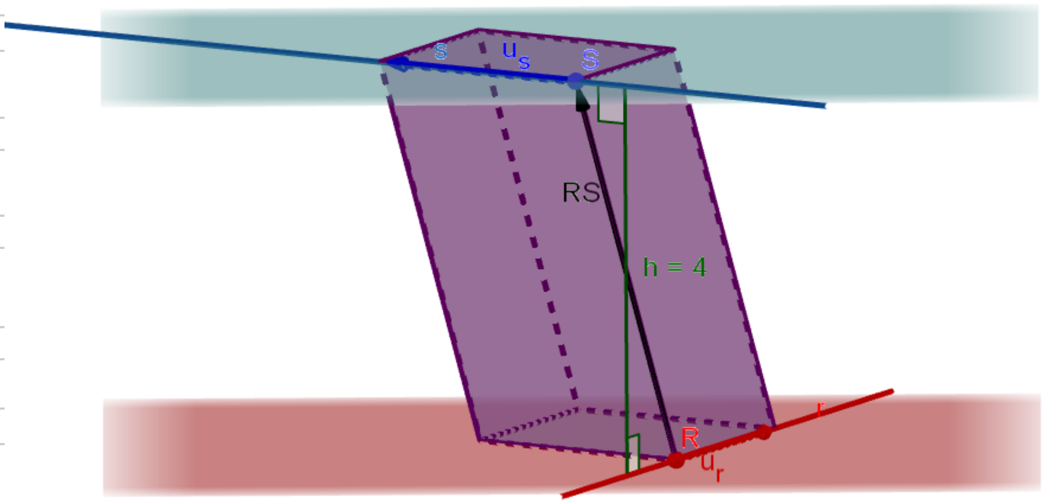

Figura 5: Ejercicio 3a) Interpretación geométrica de la fórmula para el cálculo de la distancia entre dos rectas que se cruzan

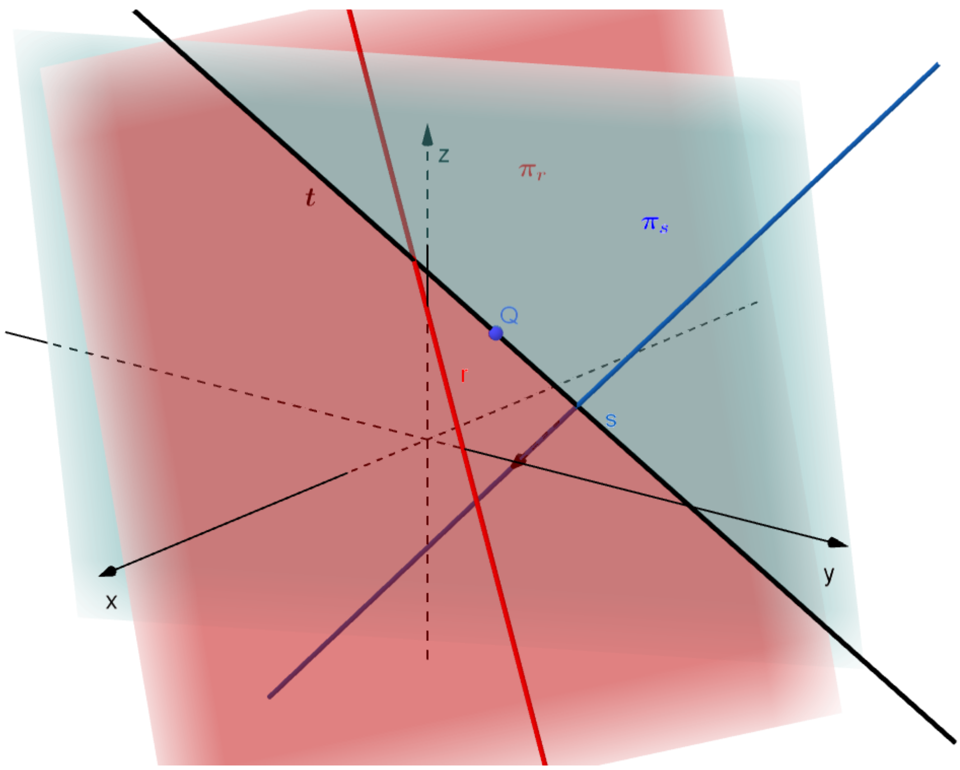

Figura 6: Ejercicio 3b) Recta que pasa por un punto Q y corta a otras dos

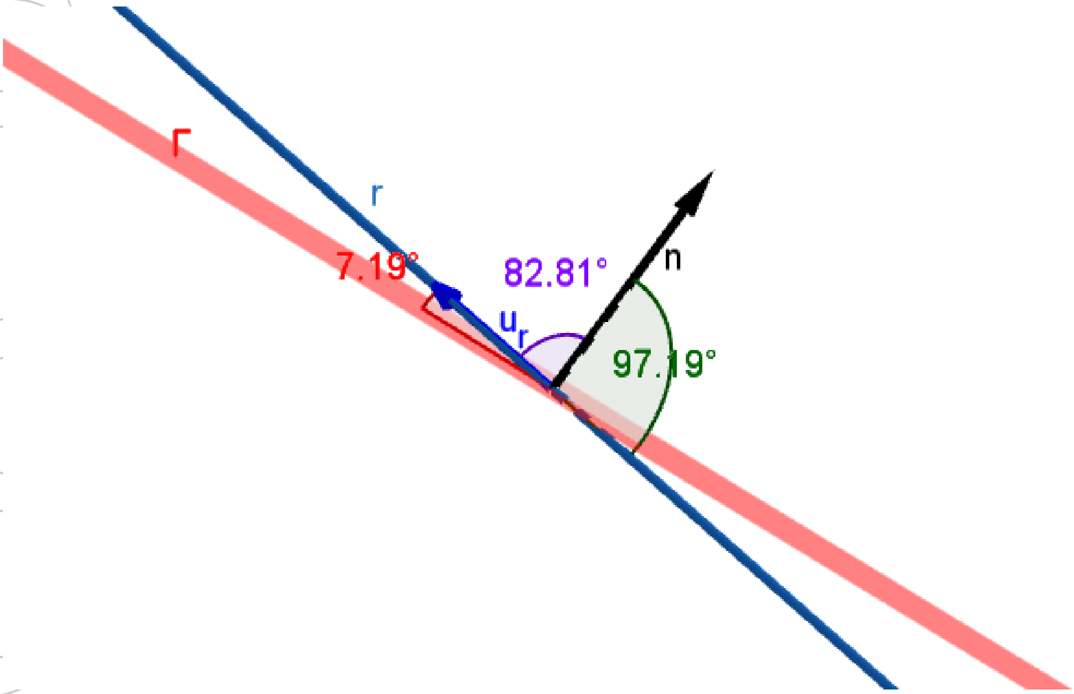

Figura 7: Ejercicio 4b) Ángulo entre recta y plano