Cálculo de límites

Matemáticas II

IES O Couto

curso 2019-2020

Propiedades para el cálculo de límites (I)

- Dadas las funciones f, g, y h, definidas en un entorno de $x = a$ (con $a \in \mathbb{R}$ o infinito), y verificando $f \leq g \leq h$ en un entorno de $x = a$, entonces:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L \text{ (real o infinito)} \implies \exists \lim_{x\to a} h(x) = L$$

- Si f es una función acotada en un entorno de $x = a$ (con $a \in \mathbb{R}$ o infinito), y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0$$

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, y $L > 0$ (con $a \in \mathbb{R}$ o infinito), entonces $f(x) > 0$ en un entorno de a.
  Análogamente, si $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, y $L < 0$ (con $a \in \mathbb{R}$ o infinito), entonces $f(x) < 0$ en un entorno de a.

Propiedades para el cálculo de límites (II)

Operaciones con límites

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$, y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ (con a, L_1 y L_2 reales o infinitos), entonces, salvo en los casos de indeterminación, se cumple:

- $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$
- $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$
- $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$
- $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L_1}{L_2}$
- $\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = L_1^{L_2}$

Indeterminaciones

Excepciones

Las propiedades anteriores no pueden aplicarse para obtener directamente el valor de un límite en los casos siguientes, conocidos como indenterminaciones:

I) $+\infty - \infty$

II) $0 \cdot \infty$

III) $\dfrac{0}{0}$ $\qquad \dfrac{\infty}{\infty}$

IV) 0^0 $\qquad \infty^0$ $\qquad 1^\infty$

Ejercicios

Ejercicio 1

Calcula los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{arc\,tg}(x) - x}{2x - \operatorname{arc\,sen}(x)}$

b) $\lim_{x\to 0^+} \ln(x)\operatorname{tg}(x)$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x) + (1-x)^2 - 1}{\ln(\cos(x))}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \operatorname{sen}(x)}$

e) $\lim_{x\to +\infty} (2x - \sqrt{1 + x + 4x^2})$

f) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}(x)} - \dfrac{1}{x}\right)$

g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{tg}(x)}{1 - \cos(2x)}$

h) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{x}{\operatorname{sen}(\pi x)}}$

Ejercicio 2

a) *Calcula en función del parámetro* α *el límite*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)}$$

b) *Calcula* m *para que* $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+mx)}{\operatorname{sen}(2x)}=3$.

c) *Calcula* b *para que los siguientes límites sean números reales, y obtén dichos límites.*

I) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos(x)+b\operatorname{sen}(x)}{x^3}$

II) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{b}{2x}\right)$