Resolución de Problemas del Bloque de Geometría

Geometría Analítica en el Espacio (II)

Ejercicio 57

IES O Couto

curso 2019-2020

Ejercicio 57

Calcular la ecuación de la recta simétrica de $r : \frac{x-1}{1} = -\frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ respecto del plano $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$.

1. Primero necesitamos determinar la posición relativa de r y Π para asegurarnos de que r no está contenida en Π (de ser así, la simétrica de r sería ella misma):

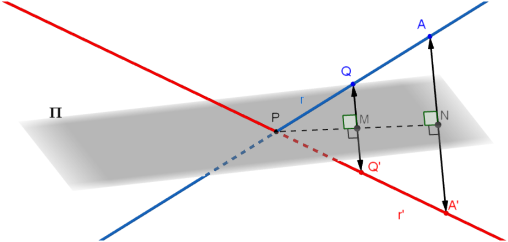
1. Primero necesitamos determinar la posición relativa de r y Π para asegurarnos de que r no está contenida en Π (de ser así, la simétrica de r sería ella misma):
   - El vector director de r es $\overrightarrow{u_r} = (1, -1, 1)$.

1. Primero necesitamos determinar la posición relativa de r y Π para asegurarnos de que r no está contenida en Π (de ser así, la simétrica de r sería ella misma):
   - El vector director de r es $\overrightarrow{u_r} = (1, -1, 1)$.
   - El vector normal a Π es $\overrightarrow{n} = (1, 1, -2)$.

1. Primero necesitamos determinar la posición relativa de r y Π para asegurarnos de que r no está contenida en Π (de ser así, la simétrica de r sería ella misma):
   - El vector director de r es $\overrightarrow{u_r} = (1, -1, 1)$.
   - El vector normal a Π es $\overrightarrow{n} = (1, 1, -2)$.
   - Como $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n} = -2 \neq 0$, entonces $\overrightarrow{u_r} \not\perp \overrightarrow{n}$. Es decir, r y Π se cortan en un punto.

1. Primero necesitamos determinar la posición relativa de r y Π para asegurarnos de que r no está contenida en Π (de ser así, la simétrica de r sería ella misma):
   - El vector director de r es $\overrightarrow{u_r} = (1, -1, 1)$.
   - El vector normal a Π es $\overrightarrow{n} = (1, 1, -2)$.
   - Como $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n} = -2 \neq 0$, entonces $\overrightarrow{u_r} \not\perp \overrightarrow{n}$. Es decir, r y Π se cortan en un punto.
2. Para hallar la simétrica de r respecto a Π, r', es suficiente obtener dos puntos $P, Q \in r$, y calcular sus simétricos P' y Q' con respecto a Π. La recta r' buscada pasará por P' y Q'. (Lo más cómodo, es que uno de dichos puntos sea $P = r \cap \Pi$, porque así $P' = P$)

1. Primero necesitamos determinar la posición relativa de r y Π para asegurarnos de que r no está contenida en Π (de ser así, la simétrica de r sería ella misma):
   - El vector director de r es $\overrightarrow{u_r} = (1, -1, 1)$.
   - El vector normal a Π es $\overrightarrow{n} = (1, 1, -2)$.
   - Como $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n} = -2 \neq 0$, entonces $\overrightarrow{u_r} \not\perp \overrightarrow{n}$. Es decir, r y Π se cortan en un punto.
2. Para hallar la simétrica de r respecto a Π, r', es suficiente obtener dos puntos $P, Q \in r$, y calcular sus simétricos P' y Q' con respecto a Π. La recta r' buscada pasará por P' y Q'. (Lo más cómodo, es que uno de dichos puntos sea $P = r \cap \Pi$, porque así $P' = P$)



3. Cálculo de $P = r \cap \Pi$:

3. Cálculo de $P = r \cap \Pi$:
   - $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow P = (1 + \lambda, -\lambda, \lambda)$

3. Cálculo de $P = r \cap \Pi$:

- $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow P = (1 + \lambda, -\lambda, \lambda)$
- $P \in \Pi \Longrightarrow 1 + \lambda + (-\lambda) - 2\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P = (2, -1, 1)$

3. Cálculo de $P = r \cap \Pi$:
   - $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies P = (1 + \lambda, -\lambda, \lambda)$
   - $P \in \Pi \implies 1 + \lambda + (-\lambda) - 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = 1 \implies P = (2, -1, 1)$
4. Obtención de otro punto $Q \in r$:

3. Cálculo de $P = r \cap \Pi$:
   - $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies P = (1 + \lambda, -\lambda, \lambda)$
   - $P \in \Pi \implies 1 + \lambda + (-\lambda) - 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = 1 \implies P = (2, -1, 1)$
4. Obtención de otro punto $Q \in r$:
   - $\lambda = 0 \implies Q = (1, 0, 0) \in r$

3. Cálculo de $P = r \cap \Pi$:
   - $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies P = (1 + \lambda, -\lambda, \lambda)$
   - $P \in \Pi \implies 1 + \lambda + (-\lambda) - 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = 1 \implies P = (2, -1, 1)$
4. Obtención de otro punto $Q \in r$:
   - $\lambda = 0 \implies Q = (1, 0, 0) \in r$
5. Obtención de Q', simétrico de Q respecto Π:

3. Cálculo de $P = r \cap \Pi$:
   - $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies P = (1 + \lambda, -\lambda, \lambda)$
   - $P \in \Pi \implies 1 + \lambda + (-\lambda) - 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = 1 \implies P = (2, -1, 1)$
4. Obtención de otro punto $Q \in r$:
   - $\lambda = 0 \implies Q = (1, 0, 0) \in r$
5. Obtención de Q', simétrico de Q respecto Π:
   - Si es s la recta que pasa por Q y es perpendicular a Π, su vector director es $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{n} = (1, 1, -2)$. Es decir: $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$

3. Cálculo de $P = r \cap \Pi$:
   - $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies P = (1 + \lambda, -\lambda, \lambda)$
   - $P \in \Pi \implies 1 + \lambda + (-\lambda) - 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = 1 \implies P = (2, -1, 1)$
4. Obtención de otro punto $Q \in r$:
   - $\lambda = 0 \implies Q = (1, 0, 0) \in r$
5. Obtención de Q', simétrico de Q respecto Π:
   - Si es s la recta que pasa por Q y es perpendicular a Π, su vector director es $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{n} = (1, 1, -2)$. Es decir: $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$
   - Sea $M = S \cap \Pi$:

3. Cálculo de $P = r \cap \Pi$:
   - $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies P = (1 + \lambda, -\lambda, \lambda)$
   - $P \in \Pi \implies 1 + \lambda + (-\lambda) - 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = 1 \implies P = (2, -1, 1)$
4. Obtención de otro punto $Q \in r$:
   - $\lambda = 0 \implies Q = (1, 0, 0) \in r$
5. Obtención de Q', simétrico de Q respecto Π:
   - Si es s la recta que pasa por Q y es perpendicular a Π, su vector director es $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{n} = (1, 1, -2)$. Es decir: $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$
   - Sea $M = S \cap \Pi$:

$$\left.\begin{array}{l} M \in s \implies M = (1 + \lambda, \lambda, -2\lambda) \\ M \in \Pi \implies 1 + \lambda + \lambda - 2(-2\lambda) + 1 = 0 \end{array}\right\} \implies \lambda = -\frac{1}{3} \implies$$

3. Cálculo de $P = r \cap \Pi$:
   - $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies P = (1 + \lambda, -\lambda, \lambda)$
   - $P \in \Pi \implies 1 + \lambda + (-\lambda) - 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = 1 \implies P = (2, -1, 1)$
4. Obtención de otro punto $Q \in r$:
   - $\lambda = 0 \implies Q = (1, 0, 0) \in r$
5. Obtención de Q', simétrico de Q respecto Π:
   - Si es s la recta que pasa por Q y es perpendicular a Π, su vector director es $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{n} = (1, 1, -2)$. Es decir: $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$
   - Sea $M = S \cap \Pi$:

$$\left.\begin{array}{l} M \in s \implies M = (1 + \lambda, \lambda, -2\lambda) \\ M \in \Pi \implies 1 + \lambda + \lambda - 2(-2\lambda) + 1 = 0 \end{array}\right\} \implies \lambda = -\frac{1}{3} \implies$$

$$M = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

3. Cálculo de $P = r \cap \Pi$:
   - $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies P = (1+\lambda, -\lambda, \lambda)$
   - $P \in \Pi \implies 1 + \lambda + (-\lambda) - 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = 1 \implies P = (2, -1, 1)$
4. Obtención de otro punto $Q \in r$:
   - $\lambda = 0 \implies Q = (1, 0, 0) \in r$
5. Obtención de Q', simétrico de Q respecto Π:
   - Si es s la recta que pasa por Q y es perpendicular a Π, su vector director es $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{n} = (1, 1, -2)$. Es decir: $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$
   - Sea $M = S \cap \Pi$:

$$\left.\begin{array}{l} M \in s \implies M = (1+\lambda, \lambda, -2\lambda) \\ M \in \Pi \implies 1 + \lambda + \lambda - 2(-2\lambda) + 1 = 0 \end{array}\right\} \implies \lambda = -\frac{1}{3} \implies$$

$$M = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

   - $Q' = (x', y', z')$ verifica que $\overrightarrow{MQ'} = -\overrightarrow{MQ}$:

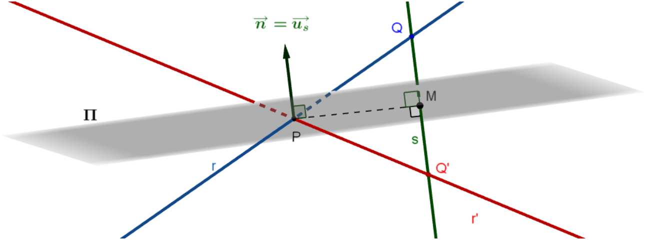
3. Cálculo de $P = r \cap \Pi$:
   - $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies P = (1 + \lambda, -\lambda, \lambda)$
   - $P \in \Pi \implies 1 + \lambda + (-\lambda) - 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = 1 \implies P = (2, -1, 1)$
4. Obtención de otro punto $Q \in r$:
   - $\lambda = 0 \implies Q = (1, 0, 0) \in r$
5. Obtención de Q', simétrico de Q respecto Π:
   - Si es s la recta que pasa por Q y es perpendicular a Π, su vector director es $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{n} = (1, 1, -2)$. Es decir: $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$
   - Sea $M = S \cap \Pi$:

$$\left.\begin{array}{l} M \in s \implies M = (1 + \lambda, \lambda, -2\lambda) \\ M \in \Pi \implies 1 + \lambda + \lambda - 2(-2\lambda) + 1 = 0 \end{array}\right\} \implies \lambda = -\frac{1}{3} \implies$$

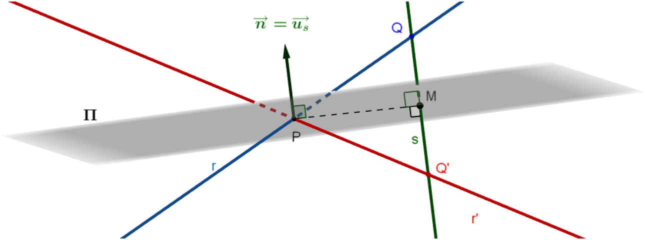
$$M = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

   - $Q' = (x', y', z')$ verifica que $\overrightarrow{MQ'} = -\overrightarrow{MQ}$:

$$\left.\begin{array}{l} x' - \frac{2}{3} = -\left(1 - \frac{2}{3}\right) \\ y' + \frac{1}{3} = -\left(0 + \frac{1}{3}\right) \\ z' - \frac{2}{3} = -\left(0 - \frac{2}{3}\right) \end{array}\right\} \implies Q' = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

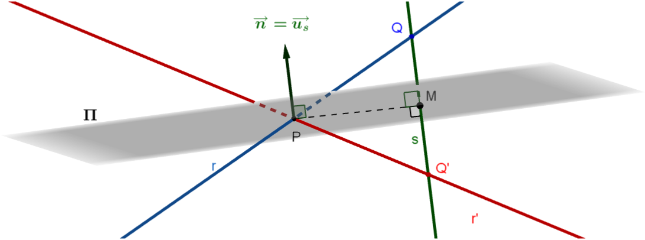


❻ Cálculo de la recta r' que pasa por P y Q':



6. Cálculo de la recta r' que pasa por P y Q':
   - (Paramétricas)

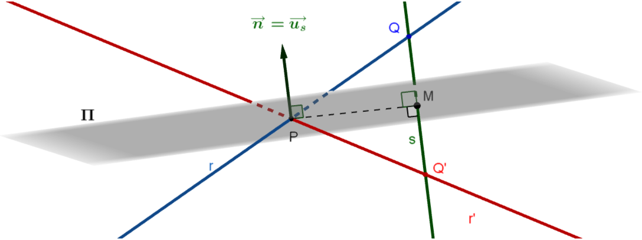
$$r' : \begin{cases} x = 2 + \lambda \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \\ y = -1 + \lambda \left(-\frac{2}{3} + 1 \right) \\ z = 1 + \lambda \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \end{cases} \implies r' : \begin{cases} x = 2 - \frac{5}{3}\lambda \\ y = -1 + \frac{1}{3}\lambda \\ z = 1 + \frac{1}{3}\lambda \end{cases}$$



6. Cálculo de la recta r' que pasa por P y Q':
   - (Paramétricas)

$$r' : \begin{cases} x = 2 + \lambda\left(\frac{1}{3} - 2\right) \\ y = -1 + \lambda\left(-\frac{2}{3} + 1\right) \\ z = 1 + \lambda\left(\frac{4}{3} - 1\right) \end{cases} \Longrightarrow r' : \begin{cases} x = 2 - \frac{5}{3}\lambda \\ y = -1 + \frac{1}{3}\lambda \\ z = 1 + \frac{1}{3}\lambda \end{cases}$$

   - (Continua) $r' : \frac{x-2}{-5} = y + 1 = z - 1$



6. Cálculo de la recta r' que pasa por P y Q':
   - (Paramétricas)
     $$r' : \begin{cases} x = 2 + \lambda\left(\frac{1}{3} - 2\right) \\ y = -1 + \lambda\left(-\frac{2}{3} + 1\right) \\ z = 1 + \lambda\left(\frac{4}{3} - 1\right) \end{cases} \Longrightarrow r' : \begin{cases} x = 2 - \frac{5}{3}\lambda \\ y = -1 + \frac{1}{3}\lambda \\ z = 1 + \frac{1}{3}\lambda \end{cases}$$
   - (Continua) $r' : \frac{x-2}{-5} = y + 1 = z - 1$
   - (Implícita) $r' : \begin{cases} y - z = -2 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$