Resolución de Problemas del Bloque de Geometría

Geometría Analítica en el Espacio (II)

Ejercicio 43

IES O Couto

curso 2019-2020

Ejercicio 43

Estudiar en función de los valores de k la posición relativa de los planos

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: & kx - 2y + z - 1 &= 0 \\ \Pi_2 &: & x - 2ky + kz - 3 &= 0 \\ \Pi_3 &: & x - 4y + kz - k &= 0 \end{aligned}$$

Hay que estudiar la compatibilidad del sistema $\begin{cases} kx - 2y + z = 1 \\ x - 2ky + kz = 3 \\ x - 4y + kz = k \end{cases}$

Hay que estudiar la compatibilidad del sistema $\begin{cases} kx - 2y + z = 1 \\ x - 2ky + kz = 3 \\ x - 4y + kz = k \end{cases}$

- Sean $A = \begin{pmatrix} k & -2 & 1 \\ 1 & -2k & k \\ 1 & -4 & k \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} k & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2k & k & 3 \\ 1 & -4 & k & k \end{pmatrix}$ la matriz del sistema y la matriz ampliada respectivamente.

Hay que estudiar la compatibilidad del sistema $\begin{cases} kx - 2y + z = 1 \\ x - 2ky + kz = 3 \\ x - 4y + kz = k \end{cases}$

- Sean $A = \begin{pmatrix} k & -2 & 1 \\ 1 & -2k & k \\ 1 & -4 & k \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} k & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2k & k & 3 \\ 1 & -4 & k & k \end{pmatrix}$ la matriz del sistema y la matriz ampliada respectivamente.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & -2 & 1 \\ 1 & -2k & k \\ 1 & -4 & k \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_2} |A| = \begin{vmatrix} k & -2 & 1 \\ 0 & -2k+4 & 0 \\ 1 & -4 & k \end{vmatrix}$$

Hay que estudiar la compatibilidad del sistema $\begin{cases} kx - 2y + z = 1 \\ x - 2ky + kz = 3 \\ x - 4y + kz = k \end{cases}$

- Sean $A = \begin{pmatrix} k & -2 & 1 \\ 1 & -2k & k \\ 1 & -4 & k \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} k & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2k & k & 3 \\ 1 & -4 & k & k \end{pmatrix}$ la matriz del sistema y la matriz ampliada respectivamente.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & -2 & 1 \\ 1 & -2k & k \\ 1 & -4 & k \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_2} |A| = \begin{vmatrix} k & -2 & 1 \\ 0 & -2k+4 & 0 \\ 1 & -4 & k \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{2+2}(-2k+4)\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = (-2k+4)(k^2-1)$$

Hay que estudiar la compatibilidad del sistema $\left\{\begin{array}{l} kx - 2y + z = 1 \\ x - 2ky + kz = 3 \\ x - 4y + kz = k \end{array}\right.$

- Sean $A = \begin{pmatrix} k & -2 & 1 \\ 1 & -2k & k \\ 1 & -4 & k \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} k & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2k & k & 3 \\ 1 & -4 & k & k \end{pmatrix}$ la matriz del sistema y la matriz ampliada respectivamente.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & -2 & 1 \\ 1 & -2k & k \\ 1 & -4 & k \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_2} |A| = \begin{vmatrix} k & -2 & 1 \\ 0 & -2k+4 & 0 \\ 1 & -4 & k \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{2+2}(-2k+4)\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = (-2k+4)(k^2-1)$$

$$|A| = -2(k-2)(k-1)(k+1)$$

Hay que estudiar la compatibilidad del sistema $\begin{cases} kx - 2y + z = 1 \\ x - 2ky + kz = 3 \\ x - 4y + kz = k \end{cases}$

- Sean $A = \begin{pmatrix} k & -2 & 1 \\ 1 & -2k & k \\ 1 & -4 & k \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} k & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2k & k & 3 \\ 1 & -4 & k & k \end{pmatrix}$ la matriz del sistema y la matriz ampliada respectivamente.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & -2 & 1 \\ 1 & -2k & k \\ 1 & -4 & k \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_2} |A| = \begin{vmatrix} k & -2 & 1 \\ 0 & -2k+4 & 0 \\ 1 & -4 & k \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{2+2}(-2k+4)\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = (-2k+4)(k^2-1)$$

$$|A| = -2(k-2)(k-1)(k+1)$$

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 1 \\ k = 2 \end{cases}$$

- $\forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ $rango(A) = rango(A^*) = 3 =$nº incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).

- $\forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ $rango(A) = rango(A^*) = 3 =$nº incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).
  Es decir, $\forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ los planos se cortan en un punto.

- $\forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ $rango(A) = rango(A^*) = 3 =$nº incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).
  Es decir, $\forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ los planos se cortan en un punto.
- $k = -1$:

- $\forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ $rango(A) = rango(A^*) = 3 =$nº incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).
  Es decir, $\forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ los planos se cortan en un punto.
- $k = -1$:
  - En $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, se tiene $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto $rango(A) = 2$

- $\forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ $rango(A) = rango(A^*) = 3 =$nº incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).
  Es decir, $\forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ los planos se cortan en un punto.
- $k = -1$:
  - En $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, se tiene $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto
    $rango(A) = 2$
    (Además se ve fácilmente que los vectores normales a Π_1 y Π_2 son proporcionales, mientras que el vector normal de Π_3 es linealmente independiente de ellos)

- $\forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ $rango(A) = rango(A^*) = 3 =$nº incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).
  Es decir, $\forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ los planos se cortan en un punto.
- $k = -1$:
  - En $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, se tiene $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto $rango(A) = 2$
    (Además se ve fácilmente que los vectores normales a Π_1 y Π_2 son proporcionales, mientras que el vector normal de Π_3 es linealmente independiente de ellos)
  - En $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, se tiene $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto, $rango(A^*) = 3$

- $\forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ $rango(A) = rango(A^*) = 3 =$nº incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).
  Es decir, $\forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ los planos se cortan en un punto.
- $k = -1$:
  - En $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, se tiene $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto $rango(A) = 2$
    (Además se ve fácilmente que los vectores normales a Π_1 y Π_2 son proporcionales, mientras que el vector normal de Π_3 es linealmente independiente de ellos)
  - En $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, se tiene $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto, $rango(A^*) = 3$
  - $rango(A) < rango(A^*) \implies$ sistema incompatible

- $\forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ $rango(A) = rango(A^*) = 3 =$n° incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).
  Es decir, $\forall\, k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ los planos se cortan en un punto.
- $k = -1$:
  - En $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, se tiene $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto $rango(A) = 2$
    (Además se ve fácilmente que los vectores normales a Π_1 y Π_2 son proporcionales, mientras que el vector normal de Π_3 es linealmente independiente de ellos)
  - En $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, se tiene $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto, $rango(A^*) = 3$
  - $rango(A) < rango(A^*) \implies$ sistema incompatible

  Por tanto, los planos Π_1 y Π_2 son paralelos, y Π_3 corta a cada uno de ellos en una recta.

- $k = 1$:

- $k = 1$:
  - En $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene $rango(A) = 2$ (las dos primeras filas son iguales). Por tanto $rango(A) = 2$

- $k = 1$:
  - En $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene $rango(A) = 2$ (las dos primeras filas son iguales). Por tanto $rango(A) = 2$
  - (Además se ve fácilmente que los vectores normales a Π_1 y Π_2 son proporcionales, mientras que el vector normal de Π_3 es linealmente independiente de ellos)

- $k = 1$:
  - En $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene $rango(A) = 2$ (las dos primeras filas son iguales). Por tanto $rango(A) = 2$
  - (Además se ve fácilmente que los vectores normales a Π_1 y Π_2 son proporcionales, mientras que el vector normal de Π_3 es linealmente independiente de ellos)
  - En $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto, $rango(A^*) = 3$

- $k = 1$:
  - En $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene $rango(A) = 2$ (las dos primeras filas son iguales). Por tanto $rango(A) = 2$
  - (Además se ve fácilmente que los vectores normales a Π_1 y Π_2 son proporcionales, mientras que el vector normal de Π_3 es linealmente independiente de ellos)
  - En $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto, $rango(A^*) = 3$
  - Por tanto, $rango(A) < rango(A^*) \implies$ sistema incompatible

- $k = 1$:
  - En $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene $rango(A) = 2$ (las dos primeras filas son iguales). Por tanto $rango(A) = 2$
  - (Además se ve fácilmente que los vectores normales a Π_1 y Π_2 son proporcionales, mientras que el vector normal de Π_3 es linealmente independiente de ellos)
  - En $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto, $rango(A^*) = 3$
  - Por tanto, $rango(A) < rango(A^*) \implies$ sistema incompatible

Es decir: los planos Π_1 y Π_2 son paralelos, y Π_3 corta a cada uno de ellos en una recta.

- $k = 2$:

- $k = 2$:
  - En $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene $rango(A) = 2$ (las dos últimas filas son iguales). Por tanto $rango(A) = 2$

- $k = 2$:
  - En $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene $rango(A) = 2$ (las dos últimas filas son iguales). Por tanto $rango(A) = 2$
  - (Además se ve fácilmente que los vectores normales a Π_2 y Π_3 son proporcionales, mientras que el vector normal de Π_1 es linealmente independiente de ellos)

- $k = 2$:
  - En $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene $rango(A) = 2$ (las dos últimas filas son iguales). Por tanto $rango(A) = 2$
  - (Además se ve fácilmente que los vectores normales a Π_2 y Π_3 son proporcionales, mientras que el vector normal de Π_1 es linealmente independiente de ellos)
  - En $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto, $rango(A^*) = 3$

- $k = 2$:
  - En $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene $rango(A) = 2$ (las dos últimas filas son iguales). Por tanto $rango(A) = 2$
  - (Además se ve fácilmente que los vectores normales a Π_2 y Π_3 son proporcionales, mientras que el vector normal de Π_1 es linealmente independiente de ellos)
  - En $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto, $rango(A^*) = 3$
  - Por tanto, $rango(A) < rango(A^*) \implies$ sistema incompatible.

- $k = 2$:
  - En $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene $rango(A) = 2$ (las dos últimas filas son iguales). Por tanto $rango(A) = 2$
  - (Además se ve fácilmente que los vectores normales a Π_2 y Π_3 son proporcionales, mientras que el vector normal de Π_1 es linealmente independiente de ellos)
  - En $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto, $rango(A^*) = 3$
  - Por tanto, $rango(A) < rango(A^*) \implies$ sistema incompatible.

Es decir: los planos Π_2 y Π_3 son paralelos, y Π_1 corta a cada uno de ellos en una recta.