Resolución de Problemas del Bloque de Geometría

Geometría Analítica en el Espacio (II)

Ejercicio 35

IES O Couto

curso 2019-2020

Ejercicio 35

Dadas $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ y $s: \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{3-z}{2}$

a) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen de coordenadas, y se apoya en r y s.

b) Calcular el ángulo que forman r y t.

c) Calcular la distancia entre r y s.

Apartado a)

Hay que comprobar la posición relativa de r y s. El problema podría tener infinitas soluciones si las rectas fuesen coplanarias y estuviesen en un plano que pasa por O, o ninguna si fuesen paralelas y el plano que las contiene no pasa por O.

Veamos si $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ son coplanarios o no:

Apartado a)

Hay que comprobar la posición relativa de r y s. El problema podría tener infinitas soluciones si las rectas fuesen coplanarias y estuviesen en un plano que pasa por O, o ninguna si fuesen paralelas y el plano que las contiene no pasa por O.

Veamos si $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ son coplanarios o no:

- r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 3, 4)$, y pasa por $R = (1, 1, 1)$.

Apartado a)

Hay que comprobar la posición relativa de r y s. El problema podría tener infinitas soluciones si las rectas fuesen coplanarias y estuviesen en un plano que pasa por O, o ninguna si fuesen paralelas y el plano que las contiene no pasa por O.

Veamos si $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ son coplanarios o no:

- r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 3, 4)$, y pasa por $R = (1, 1, 1)$.
- s tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (4, 3, -2)$, y pasa por $S = (-1, 2, 3)$

Apartado a)

Hay que comprobar la posición relativa de r y s. El problema podría tener infinitas soluciones si las rectas fuesen coplanarias y estuviesen en un plano que pasa por O, o ninguna si fuesen paralelas y el plano que las contiene no pasa por O.

Veamos si $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ son coplanarios o no:

- r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2,3,4)$, y pasa por $R = (1,1,1)$.
- s tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (4,3,-2)$, y pasa por $S = (-1,2,3)$
- $\overrightarrow{u_r} \nparallel \overrightarrow{u_s} \implies r$ y s se cortan o se cruzan.

Apartado a)

Hay que comprobar la posición relativa de r y s. El problema podría tener infinitas soluciones si las rectas fuesen coplanarias y estuviesen en un plano que pasa por O, o ninguna si fuesen paralelas y el plano que las contiene no pasa por O.

Veamos si $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ son coplanarios o no:

- r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 3, 4)$, y pasa por $R = (1, 1, 1)$.
- s tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (4, 3, -2)$, y pasa por $S = (-1, 2, 3)$
- $\overrightarrow{u_r} \nparallel \overrightarrow{u_s} \implies r$ y s se cortan o se cruzan.

$$[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 24 + 16 - 24 - 4 + 24 = 24 \neq 0$$

Apartado a)

Hay que comprobar la posición relativa de r y s. El problema podría tener infinitas soluciones si las rectas fuesen coplanarias y estuviesen en un plano que pasa por O, o ninguna si fuesen paralelas y el plano que las contiene no pasa por O.

Veamos si $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ son coplanarios o no:

- r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 3, 4)$, y pasa por $R = (1, 1, 1)$.
- s tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (4, 3, -2)$, y pasa por $S = (-1, 2, 3)$
- $\overrightarrow{u_r} \nparallel \overrightarrow{u_s} \implies r$ y s se cortan o se cruzan.

$$[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 24 + 16 - 24 - 4 + 24 = 24 \neq 0$$

$$\implies \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s} \text{ no son coplanarios}$$

Apartado a)

Hay que comprobar la posición relativa de r y s. El problema podría tener infinitas soluciones si las rectas fuesen coplanarias y estuviesen en un plano que pasa por O, o ninguna si fuesen paralelas y el plano que las contiene no pasa por O.

Veamos si $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ son coplanarios o no:

- r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 3, 4)$, y pasa por $R = (1, 1, 1)$.
- s tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (4, 3, -2)$, y pasa por $S = (-1, 2, 3)$
- $\overrightarrow{u_r} \not\parallel \overrightarrow{u_s} \implies r$ y s se cortan o se cruzan.

$$[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 24 + 16 - 24 - 4 + 24 = 24 \neq 0$$

$$\implies \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s} \text{ no son coplanarios}$$

- r y s se cruzan. La recta t es única.

- La recta t se obtendrá como el resultado de intersecar los planos Π_1 y Π_2:
  - Π_1 contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.
  - Π_2 contiene a s y pasa por el origen de coordenadas.

- La recta t se obtendrá como el resultado de intersecar los planos Π_1 y Π_2:
  - Π_1 contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.
  - Π_2 contiene a s y pasa por el origen de coordenadas.

1. Cálculo de Π_1:

- La recta t se obtendrá como el resultado de intersecar los planos Π_1 y Π_2:
  - Π_1 contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.
  - Π_2 contiene a s y pasa por el origen de coordenadas.

1. Cálculo de Π_1:
   - r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 3, 4)$, y pasa por $R = (1, 1, 1)$.

- La recta t se obtendrá como el resultado de intersecar los planos Π_1 y Π_2:
  - Π_1 contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.
  - Π_2 contiene a s y pasa por el origen de coordenadas.

1. Cálculo de Π_1:
   - r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 3, 4)$, y pasa por $R = (1, 1, 1)$.
   - Las ecuaciones paramétricas de r son $\quad r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{array} \right.$

- La recta t se obtendrá como el resultado de intersecar los planos Π_1 y Π_2:
  - Π_1 contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.
  - Π_2 contiene a s y pasa por el origen de coordenadas.

1. Cálculo de Π_1:
   - r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 3, 4)$, y pasa por $R = (1, 1, 1)$.
   - Las ecuaciones paramétricas de r son $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$
   - Para $\lambda = 1$ tenemos $A = (3, 4, 5) \in r$.

- La recta t se obtendrá como el resultado de intersecar los planos Π_1 y Π_2:
  - Π_1 contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.
  - Π_2 contiene a s y pasa por el origen de coordenadas.

1. Cálculo de Π_1:
   - r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 3, 4)$, y pasa por $R = (1, 1, 1)$.
   - Las ecuaciones paramétricas de r son $\quad r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$
   - Para $\lambda = 1$ tenemos $A = (3, 4, 5) \in r$.
   - El plano Π_1 pasa por O, A, y R.

$$\Pi_1 : [\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi_1 : \begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

- La recta t se obtendrá como el resultado de intersecar los planos Π_1 y Π_2:
  - Π_1 contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.
  - Π_2 contiene a s y pasa por el origen de coordenadas.

1. Cálculo de Π_1:
   - r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 3, 4)$, y pasa por $R = (1, 1, 1)$.
   - Las ecuaciones paramétricas de r son $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$
   - Para $\lambda = 1$ tenemos $A = (3, 4, 5) \in r$.
   - El plano Π_1 pasa por O, A, y R.

$$\Pi_1 : [\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi_1 : \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Pi_1 : x - 2y + z = 0$$

2. Cálculo de Π_2:

2. Cálculo de Π_2:
   - s tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (4, 3, -2)$, y pasa por $S = (-1, 2, 3)$

2. Cálculo de Π_2:
   - s tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (4, 3, -2)$, y pasa por $S = (-1, 2, 3)$
   - Las ecuaciones paramétricas de r son $s : \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$

2. Cálculo de Π_2:
   - s tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (4, 3, -2)$, y pasa por $S = (-1, 2, 3)$
   - Las ecuaciones paramétricas de r son $s : \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$
   - Para $\lambda = 1$ tenemos $B = (3, 5, 1) \in s$.

2. Cálculo de Π_2:
   - s tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (4, 3, -2)$, y pasa por $S = (-1, 2, 3)$
   - Las ecuaciones paramétricas de r son $s : \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$
   - Para $\lambda = 1$ tenemos $B = (3, 5, 1) \in s$.
   - El plano Π_2 pasa por O, B, y S.

$$\Pi_2 : [\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi_2 : \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

2. Cálculo de Π_2:
   - s tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (4, 3, -2)$, y pasa por $S = (-1, 2, 3)$
   - Las ecuaciones paramétricas de r son $s : \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$
   - Para $\lambda = 1$ tenemos $B = (3, 5, 1) \in s$.
   - El plano Π_2 pasa por O, B, y S.

$$\Pi_2 : [\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi_2 : \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Pi_2 : 13x - 10y + 11z = 0$$

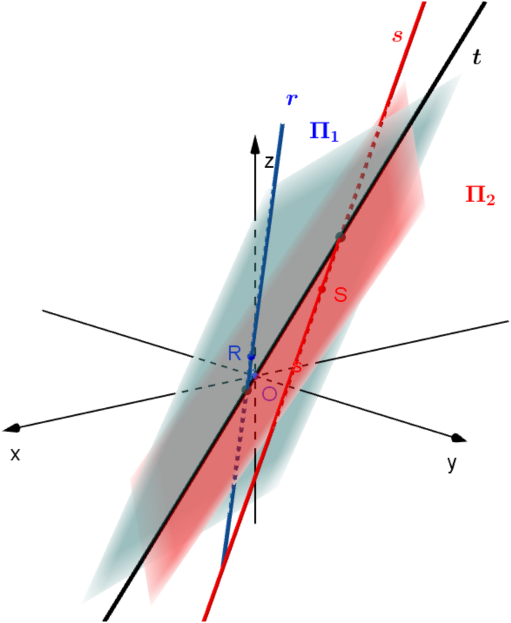
2. Cálculo de Π_2:
   - s tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (4, 3, -2)$, y pasa por $S = (-1, 2, 3)$
   - Las ecuaciones paramétricas de r son $s : \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$
   - Para $\lambda = 1$ tenemos $B = (3, 5, 1) \in s$.
   - El plano Π_2 pasa por O, B, y S.

$$\Pi_2 : [\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi_2 : \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Pi_2 : 13x - 10y + 11z = 0$$

3. La recta t tiene ecuación

$$t : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 13x - 10y + 11z = 0 \end{cases}$$


s
t
r
Π_1
z
Π_2
S
R
s
O
x
y

Apartado b)

- La recta t tiene por vector director

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 13 & -10 & 11 \end{vmatrix} = (-12, 2, 16)$$

Apartado b)

- La recta t tiene por vector director

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 13 & -10 & 11 \end{vmatrix} = (-12, 2, 16)$$

- Podemos tomar como vector director $\overrightarrow{u_t} = \frac{1}{2}(-12, 2, 16) = (-6, 1, 8)$

Apartado b)

- La recta t tiene por vector director

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 13 & -10 & 11 \end{vmatrix} = (-12, 2, 16)$$

- Podemos tomar como vector director $\overrightarrow{u_t} = \frac{1}{2}(-12, 2, 16) = (-6, 1, 8)$
- Si α es el ángulo formado por $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_t}$, deducimos el ángulo entre r y t de $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_t}$:

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_t} = |\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_t}| \cos \alpha \implies (2, 3, 4) \cdot (-6, 1, 8) = \sqrt{29} \cdot \sqrt{101} \cos \alpha \implies$$

$$\implies 23 = \sqrt{29 \cdot 101} \cos \alpha \implies \cos \alpha = \frac{23}{\sqrt{29 \cdot 101}} = 0'425 \implies$$

$$\alpha = 64'85^\circ$$

Apartado b)

- La recta t tiene por vector director

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 13 & -10 & 11 \end{vmatrix} = (-12, 2, 16)$$

- Podemos tomar como vector director $\overrightarrow{u_t} = \frac{1}{2}(-12, 2, 16) = (-6, 1, 8)$
- Si α es el ángulo formado por $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_t}$, deducimos el ángulo entre r y t de $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_t}$:

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_t} = |\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_t}| \cos \alpha \implies (2, 3, 4) \cdot (-6, 1, 8) = \sqrt{29} \cdot \sqrt{101} \cos \alpha \implies$$

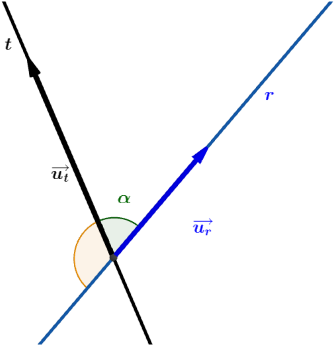
$$\implies 23 = \sqrt{29 \cdot 101} \cos \alpha \implies \cos \alpha = \frac{23}{\sqrt{29 \cdot 101}} = 0'425 \implies$$

$$\alpha = 64'85^\circ$$

- Como el ángulo α es agudo

$$\angle(r, t) = \alpha = 64'85^\circ$$

(Si α es obtuso, entonces $\angle(r, t) = 180^\circ - \alpha$)



En general $\cos\angle(r,t)=\dfrac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_t}|}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_t}|}$, ya que dependiendo del sentido de los vectores $\overrightarrow{u_t}$ y $\overrightarrow{u_r}$, α podría ser un ángulo obtuso, y el ángulo formado por dos rectas se define como el menor ángulo que determinan en el plano que las contiene.

Apartado c)

Dado que ya sabemos que las rectas se cruzan, utilizamos la fórmula para la distancia entre ellas para dicha posición relativa:

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$$

Apartado c)

Dado que ya sabemos que las rectas se cruzan, utilizamos la fórmula para la distancia entre ellas para dicha posición relativa:

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$$

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-6, 12, -6) = -6(1, 2, -1) \implies |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = 6\sqrt{6}$$

Apartado c)

Dado que ya sabemos que las rectas se cruzan, utilizamos la fórmula para la distancia entre ellas para dicha posición relativa:

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$$

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-6, 12, -6) = -6(1, 2, -1) \implies |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = 6\sqrt{6}$$

$$[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = 24$$

Apartado c)

Dado que ya sabemos que las rectas se cruzan, utilizamos la fórmula para la distancia entre ellas para dicha posición relativa:

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$$

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-6, 12, -6) = -6(1, 2, -1) \implies |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = 6\sqrt{6}$$

$$[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = 24$$

$$d(r,s) = \frac{24}{6\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$