# Resolución de Problemas del Bloque de Geometría

## Geometría Analítica en el Espacio (II)
## Ejercicio 32

IES O Couto

curso 2019-2020

## Ejercicio 32

Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = 1 + a(y-2) \\ x = z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ ax - z = 2a - 2 \end{cases}$

a) Determinar su posición relativa en función de $a$.

b) Calcular las coordenadas del punto de corte cuando sean secantes, y el ángulo que forman.

c) Para $a = 2$, determinar la ecuación de la recta $t$ perpendicular a ambas.

## Apartado a)

- $r : \begin{cases} x = 1 - 2a + ay \\ z = x \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 - 2a + a\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2a + a\lambda \end{cases}.$

## Apartado a)

- $r: \begin{cases} x = 1 - 2a + ay \\ z = x \end{cases} \implies r: \begin{cases} x = 1 - 2a + a\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2a + a\lambda \end{cases}$.

  Por tanto, $r$ tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (a, 1, a)$, y pasa por $R = (1 - 2a, 0, 1 - 2a)$

# Apartado a)

- $r : \begin{cases} x = 1 - 2a + ay \\ z = x \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 - 2a + a\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2a + a\lambda \end{cases}.$
  Por tanto, $r$ tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (a, 1, a)$, y pasa por $R = (1 - 2a, 0, 1 - 2a)$
- $s : \begin{cases} y = -1 + z \\ z = 2 - 2a + ax \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2a + a\lambda \\ z = 2 - 2a + a\lambda \end{cases}.$

## Apartado a)

- $r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2a + ay \\ z = x \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2a + a\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2a + a\lambda \end{array} \right.$.

  Por tanto, $r$ tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (a, 1, a)$, y pasa por $R = (1 - 2a, 0, 1 - 2a)$

- $s: \left\{ \begin{array}{l} y = -1 + z \\ z = 2 - 2a + ax \end{array} \right. \Longrightarrow s: \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - 2a + a\lambda \\ z = 2 - 2a + a\lambda \end{array} \right.$.

  Por tanto, $s$ tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (1, a, a)$, y pasa por $S = (0, 1 - 2a, 2 - 2a)$

## Apartado a)

- $r:\left\{\begin{array}{l} x=1-2a+ay \\ z=x \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=1-2a+a\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-2a+a\lambda \end{array}\right.$ .
  Por tanto, $r$ tiene vector director $\overrightarrow{u_r}=(a,1,a)$, y pasa por $R=(1-2a,0,1-2a)$
- $s:\left\{\begin{array}{l} y=-1+z \\ z=2-2a+ax \end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1-2a+a\lambda \\ z=2-2a+a\lambda \end{array}\right.$ .
  Por tanto, $s$ tiene vector director $\overrightarrow{u_s}=(1,a,a)$, y pasa por $S=(0,1-2a,2-2a)$
- Para estudiar la posición relativa, lo más rápido es determinar en qué casos los vectores $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_s}$, y $\overrightarrow{RS}$ son coplanarios:

## Apartado a)

- $r: \begin{cases} x = 1 - 2a + ay \\ z = x \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 1 - 2a + a\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2a + a\lambda \end{cases}.$

  Por tanto, $r$ tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (a, 1, a)$, y pasa por $R = (1 - 2a, 0, 1 - 2a)$

- $s: \begin{cases} y = -1 + z \\ z = 2 - 2a + ax \end{cases} \Longrightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2a + a\lambda \\ z = 2 - 2a + a\lambda \end{cases}.$

  Por tanto, $s$ tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (1, a, a)$, y pasa por $S = (0, 1 - 2a, 2 - 2a)$

- Para estudiar la posición relativa, lo más rápido es determinar en qué casos los vectores $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_s}$, y $\overrightarrow{RS}$ son coplanarios:
  - $[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{RS}] = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & a \\ 2a-1 & 1-2a & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2 \to F_1} \begin{vmatrix} a+1 & 1 & a \\ a+1 & a & a \\ 0 & 1-2a & 1 \end{vmatrix} \to$

    $\xrightarrow{F_2-F_1 \to F_2} \begin{vmatrix} a+1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 1-2a & 1 \end{vmatrix} = (a+1)(a-1) = 0 \Longleftrightarrow a = \pm 1$

## Apartado a)

- $r: \begin{cases} x = 1-2a+ay \\ z = x \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 1-2a+a\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1-2a+a\lambda \end{cases}.$
  Por tanto, $r$ tiene vector director $\vec{u_r} = (a, 1, a)$, y pasa por $R = (1-2a, 0, 1-2a)$
- $s: \begin{cases} y = -1+z \\ z = 2-2a+ax \end{cases} \Longrightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-2a+a\lambda \\ z = 2-2a+a\lambda \end{cases}.$
  Por tanto, $s$ tiene vector director $\vec{u_s} = (1, a, a)$, y pasa por $S = (0, 1-2a, 2-2a)$
- Para estudiar la posición relativa, lo más rápido es determinar en qué casos los vectores $\vec{u_r}$, $\vec{u_s}$, y $\vec{RS}$ son coplanarios:
  - $$[\vec{u_r}, \vec{u_s}, \vec{RS}] = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & a \\ 2a-1 & 1-2a & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2 \to F_1} \begin{vmatrix} a+1 & 1 & a \\ a+1 & a & a \\ 0 & 1-2a & 1 \end{vmatrix} \to$$
    $$\xrightarrow{F_2-F_1 \to F_2} \begin{vmatrix} a+1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 1-2a & 1 \end{vmatrix} = (a+1)(a-1) = 0 \Longleftrightarrow a = \pm 1$$
  - $\vec{u_r}$, $\vec{u_s}$ y $\vec{RS}$ son coplanarios si y solo si $a = 1$ o $a = -1$

Por tanto:

1. Caso $a = 1$

Por tanto:

1. Caso $a = 1$
   - $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 1)$. Es decir, $r$ y $s$ son paralelas o coincidentes.

Por tanto:

1. Caso $a = 1$
   - $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 1)$. Es decir, $r$ y $s$ son paralelas o coincidentes.
   - Sea $R = (-1, 0, -1) \in r$.

Por tanto:

1. Caso $a = 1$
   - $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 1)$. Es decir, $r$ y $s$ son paralelas o coincidentes.
   - Sea $R = (-1, 0, -1) \in r$.

     Como $R$ no verifca la ecuación de $s : \left\{ \begin{array}{l} y - z + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right.$ , $r$ y $s$ son paralelas.

Por tanto:

1. Caso $a = 1$
   - $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 1)$. Es decir, $r$ y $s$ son paralelas o coincidentes.
   - Sea $R = (-1, 0, -1) \in r$.

     Como $R$ no verifca la ecuación de $s : \left\{ \begin{array}{l} y - z + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right.$ , $r$ y $s$ son paralelas.
2. Caso $a = -1$

Por tanto:

1. Caso $a = 1$
   - $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 1)$. Es decir, $r$ y $s$ son paralelas o coincidentes.
   - Sea $R = (-1, 0, -1) \in r$.

     Como $R$ no verifca la ecuación de $s$ : $\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$, $r$ y $s$ son paralelas.
2. Caso $a = -1$
   - $\overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -1)$ y $\overrightarrow{u_s} = (1, -1, -1)$. Como $\overrightarrow{u_r} \not\parallel \overrightarrow{u_s}$, para que los tres vectores considerados sean coplanarios, necesariamente $r$ y $s$ se cortan en un punto.

Por tanto:

1. Caso $a = 1$
   - $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 1)$. Es decir, $r$ y $s$ son paralelas o coincidentes.
   - Sea $R = (-1, 0, -1) \in r$.

     Como $R$ no verifca la ecuación de $s$ : $\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ , $r$ y $s$ son paralelas.
2. Caso $a = -1$
   - $\overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -1)$ y $\overrightarrow{u_s} = (1, -1, -1)$. Como $\overrightarrow{u_r} \nparallel \overrightarrow{u_s}$, para que los tres vectores considerados sean coplanarios, necesariamente $r$ y $s$ se cortan en un punto.
3. Caso $a \neq \pm 1$

Por tanto:

1. Caso $a = 1$
   - $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 1)$. Es decir, $r$ y $s$ son paralelas o coincidentes.
   - Sea $R = (-1, 0, -1) \in r$.

     Como $R$ no verifca la ecuación de $s$ : $\left\{ \begin{array}{l} y - z + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right.$ , $r$ y $s$ son paralelas.
2. Caso $a = -1$
   - $\overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -1)$ y $\overrightarrow{u_s} = (1, -1, -1)$. Como $\overrightarrow{u_r} \nparallel \overrightarrow{u_s}$, para que los tres vectores considerados sean coplanarios, necesariamente $r$ y $s$ se cortan en un punto.
3. Caso $a \neq \pm 1$

   Como los vectores no son coplanarios, las rectas $r$ y $s$ se cruzan.

## Apartado b)

Para $a = -1$, las ecuaciones de las rectas son $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - z = 0 \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} y - z = -1 \\ -x - z = -4 \end{array} \right.$

## Apartado b)

Para $a = -1$, las ecuaciones de las rectas son $r : \begin{cases} x + y = 3 \\ x - z = 0 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} y - z = -1 \\ -x - z = -4 \end{cases}$

1. Cálculo del punto de corte $P = r \cap S$

## Apartado b)

Para $a=-1$, las ecuaciones de las rectas son $r:\begin{cases} x+y=3 \\ x-z=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} y-z=-1 \\ -x-z=-4 \end{cases}$

1. Cálculo del punto de corte $P=r\cap S$
   - Resolvemos el sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ x-z=0 \\ y-z=-1 \\ -x-z=-4 \end{cases}$, que forzosamente es compatible determinado porque ya hemos demostrado que las rectas se cortan en un único punto. Eso significa hay tres ecuaciones independientes (en este caso tres cualesquiera). Si elegimos todas menos la tercera:

## Apartado b)

Para $a=-1$, las ecuaciones de las rectas son $r:\left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-z=0 \end{array}\right.$ y

$s:\left\{\begin{array}{l} y-z=-1 \\ -x-z=-4 \end{array}\right.$

1. Cálculo del punto de corte $P=r\cap S$
   - Resolvemos el sistema $\left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-z=0 \\ y-z=-1 \\ -x-z=-4 \end{array}\right.$, que forzosamente es compatible determinado porque ya hemos demostrado que las rectas se cortan en un único punto. Eso significa hay tres ecuaciones independientes (en este caso tres cualesquiera). Si elegimos todas menos la tercera:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-z=0 \\ -x-z=-4 \end{array}\right. \xrightarrow{F_2+F_3\to F_3} \left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-z=0 \\ -2z=-4 \end{array}\right.$$

## Apartado b)

Para $a=-1$, las ecuaciones de las rectas son $r:\left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-z=0 \end{array}\right.$ y

$s:\left\{\begin{array}{l} y-z=-1 \\ -x-z=-4 \end{array}\right.$

1. Cálculo del punto de corte $P=r\cap S$
   - Resolvemos el sistema $\left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-z=0 \\ y-z=-1 \\ -x-z=-4 \end{array}\right.$, que forzosamente es compatible determinado porque ya hemos demostrado que las rectas se cortan en un único punto. Eso significa hay tres ecuaciones independientes (en este caso tres cualesquiera). Si elegimos todas menos la tercera:

     $$\left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-z=0 \\ -x-z=-4 \end{array}\right. \xrightarrow{F_2+F_3\to F_3} \left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-z=0 \\ -2z=-4 \end{array}\right.$$

   - Por tanto, $z=2 \overset{x-z=0}{\Longrightarrow} x=2 \overset{x+y=3}{\Longrightarrow} y=1$. Es decir, $r\cap s=P=(2,1,2)$

2. Cálculo del ángulo entre $r$ y $s$, $\angle(r, s)$:

2. Cálculo del ángulo entre $r$ y $s$, $\angle(r, s)$:
   Se deduce del producto escalar de los vectores directores:

2. Cálculo del ángulo entre $r$ y $s$, $\angle(r, s)$:
   Se deduce del producto escalar de los vectores directores:
   - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = |\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}| \cos \alpha$, siendo $\alpha = \angle(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s})$

2. Cálculo del ángulo entre $r$ y $s$, $\angle(r,s)$:
Se deduce del producto escalar de los vectores directores:
   - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = |\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}| \cos \alpha$, siendo $\alpha = \angle(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s})$
   - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, -1) \cdot (1, -1, -1) = -1$

2. Cálculo del ángulo entre $r$ y $s$, $\angle(r, s)$:
Se deduce del producto escalar de los vectores directores:
    - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = |\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}| \cos \alpha$, siendo $\alpha = \angle(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s})$
    - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, -1) \cdot (1, -1, -1) = -1$
    - $|\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{3}$

2. Cálculo del ángulo entre $r$ y $s$, $\angle(r, s)$:
   Se deduce del producto escalar de los vectores directores:
   - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = |\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}| \cos \alpha$, siendo $\alpha = \angle(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s})$
   - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, -1) \cdot (1, -1, -1) = -1$
   - $|\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{3}$
   - $|\overrightarrow{u_s}| = \sqrt{3}$

2. Cálculo del ángulo entre $r$ y $s$, $\angle(r,s)$:
Se deduce del producto escalar de los vectores directores:
   - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = |\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}| \cos\alpha$, siendo $\alpha = \angle(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s})$
   - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = (-1,1,-1) \cdot (1,-1,-1) = -1$
   - $|\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{3}$
   - $|\overrightarrow{u_s}| = \sqrt{3}$

   Por tanto:

$$-1 = 3\cos\alpha \implies \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 109'47^\circ$$

2. Cálculo del ángulo entre $r$ y $s$, $\angle(r,s)$:
Se deduce del producto escalar de los vectores directores:
   - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = |\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}| \cos \alpha$, siendo $\alpha = \angle(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s})$
   - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = (-1,1,-1) \cdot (1,-1,-1) = -1$
   - $|\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{3}$
   - $|\overrightarrow{u_s}| = \sqrt{3}$

   Por tanto:

$$-1 = 3 \cos \alpha \implies \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 109'47^\circ$$

   Como $\angle(r,s)$ es el menor ángulo formado por las rectas en el plano que contiene a ambas, entonces

$$\angle(r,s) = 180^\circ - 109'47^\circ = 70'53^\circ$$

2. Cálculo del ángulo entre $r$ y $s$, $\angle(r,s)$:
Se deduce del producto escalar de los vectores directores:
   - $\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}=|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}|\cos\alpha$, siendo $\alpha=\angle(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s})$
   - $\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}=(-1,1,-1)\cdot(1,-1,-1)=-1$
   - $|\overrightarrow{u_r}|=\sqrt{3}$
   - $|\overrightarrow{u_s}|=\sqrt{3}$

   Por tanto:

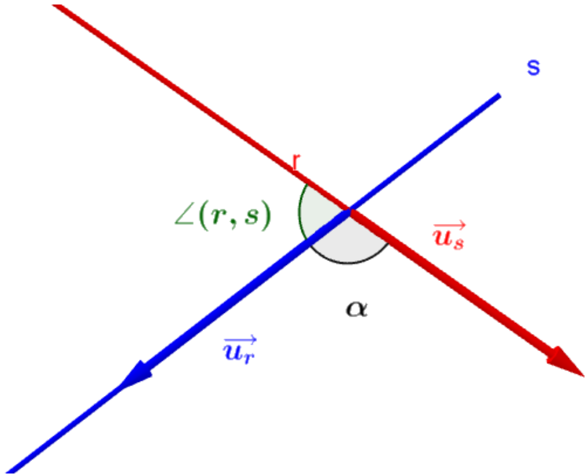
$$-1=3\cos\alpha \implies \alpha=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)=109'47^\circ$$

Como $\angle(r,s)$ es el menor ángulo formado por las rectas en el plano que contiene a ambas, entonces

$$\angle(r,s)=180^\circ-109'47^\circ=70'53^\circ$$

Por eso la fórmula general para determinar el ángulo entre dos rectas $r$ y $s$ es

$$\cos\angle(r,s)=\frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}|}$$


s
r
$\angle(r,s)$
$\overrightarrow{u_s}$
$\alpha$
$\overrightarrow{u_r}$

## Apartado c)

Para $a = 2$, tenemos $r : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = -3 \\ x - z = 0 \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} y - z = -1 \\ 2x - z = 2 \end{array} \right.$

Lo más intuitivo resultaría caracterizar $t$ como aquella que pasa por los puntos $P$ y $Q$ verificando:

$$P \in r, \ \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$Q \in s, \ \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{CD}$$

## Apartado c)

Para $a = 2$, tenemos $r : \begin{cases} x - 2y = -3 \\ x - z = 0 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} y - z = -1 \\ 2x - z = 2 \end{cases}$

Lo más intuitivo resultaría caracterizar $t$ como aquella que pasa por los puntos $P$ y $Q$ verificando:

$$P \in r, \ \ \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$$
$$Q \in s, \ \ \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{CD}$$

Determinados $P$ y $Q$, podría darse fácilmente una ecuación de $t$.

## Apartado c)

Para $a = 2$, tenemos $r : \begin{cases} x - 2y = -3 \\ x - z = 0 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} y - z = -1 \\ 2x - z = 2 \end{cases}$

Lo más intuitivo resultaría caracterizar $t$ como aquella que pasa por los puntos $P$ y $Q$ verificando:

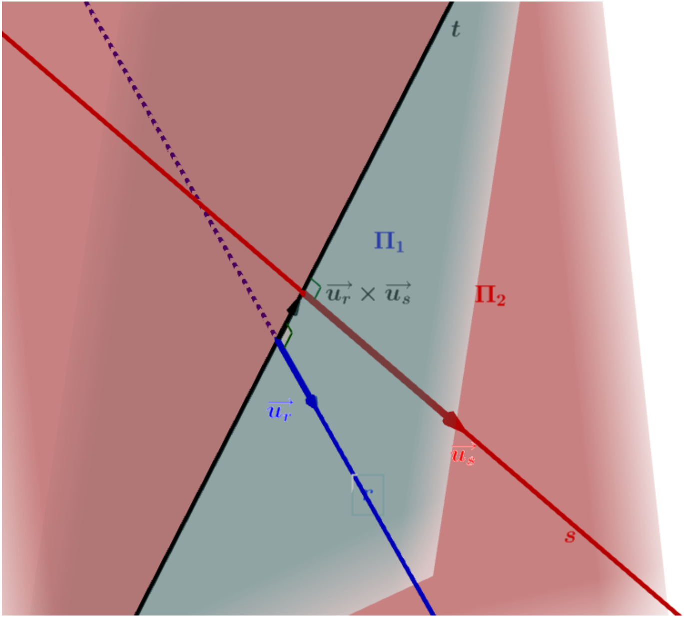
$$P \in r, \;\; \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$Q \in s, \;\; \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{CD}$$

Determinados $P$ y $Q$, podría darse fácilmente una ecuación de $t$.

El problema es que la determinación de las coordenadas de $P$ y $Q$ puede suponer cálculos incómodos. Por eso, la estrategia más eficiente es determinar $t$ como la intersección de los planos $\Pi_1$ y $\Pi_2$, tales que:

- $\Pi_1$ contiene a $r$, y tiene por vectores directores $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$
- $\Pi_2$ contiene a $s$, y tiene por vectores directores $\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$


$t$
$\Pi_1$
$\vec{u_r} \times \vec{u_s}$
$\Pi_2$
$\vec{u_r}$
$\vec{u_s}$
$r$
$s$

1. Cálculo de $\Pi_1$:

1. Cálculo de $\Pi_1$:
   - $r$ tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, 2)$

1. Cálculo de $\Pi_1$:
   - $r$ tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, 2)$
   - $s$ tiene por vector director $\overrightarrow{u_s} = (1, 2, 2)$

1. Cálculo de $\Pi_1$:
   - $r$ tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, 2)$
   - $s$ tiene por vector director $\overrightarrow{u_s} = (1, 2, 2)$
   - El vector $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$ es

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2, -2, 3)$$

1. Cálculo de $\Pi_1$:
   - $r$ tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, 2)$
   - $s$ tiene por vector director $\overrightarrow{u_s} = (1, 2, 2)$
   - El vector $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$ es

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2, -2, 3)$$

   - El plano $\Pi_1$ pasa por $R = (-3, 0, -3)$, con vectores directores $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$. Para cualquier punto $P = (x, y, z) \in \Pi_1$ se verifica que $\overrightarrow{RP}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$ son coplanarios.

$$\Pi_1 : [\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi_1 : \begin{vmatrix} x+3 & y & z+3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Pi_1 : 7(x+3) - 10y - 2(z+3) = 0$$

$$\Pi_1 : 7x - 10y - 2z + 15 = 0$$

2. Cálculo de $\Pi_2$:

2. Cálculo de $\Pi_2$:
   - $s$ tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (1, 2, 2)$

2. Cálculo de $\Pi_2$:
   - $s$ tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (1,2,2)$
   - El plano $\Pi_2$ pasa por $S = (0,-3,-2)$, con vectores directores $\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$. Para cualquier punto $P = (x,y,z) \in \Pi_2$ se verifica que $\overrightarrow{SP}$, $\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$ son coplanarios.

$$\Pi_2 : [\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi_2 : \begin{vmatrix} x & y+3 & z+2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Pi_2 : 10x - 7(y+3) + 2(z+2) = 0$$

$$\Pi_2 : 10x - 7y + 2z - 17 = 0$$

2. Cálculo de $\Pi_2$:
   - $s$ tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (1, 2, 2)$
   - El plano $\Pi_2$ pasa por $S = (0, -3, -2)$, con vectores directores $\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$. Para cualquier punto $P = (x, y, z) \in \Pi_2$ se verifica que $\overrightarrow{SP}$, $\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$ son coplanarios.

$$\Pi_2 : [\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi_2 : \begin{vmatrix} x & y+3 & z+2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Pi_2 : 10x - 7(y+3) + 2(z+2) = 0$$

$$\Pi_2 : 10x - 7y + 2z - 17 = 0$$

3. La ecuación de la recta $t$ resulta:

$$t : \begin{cases} 7x - 10y - 2z + 15 = 0 \\ 10x - 7y + 2z - 17 = 0 \end{cases}$$