Ángulos y Distancias en el Espacio

Bloque de Geometría

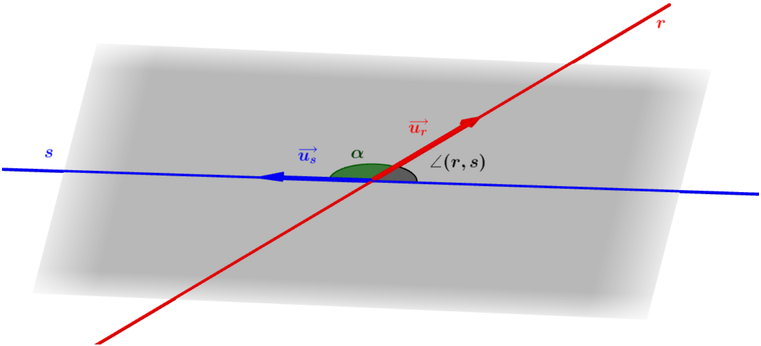
IES O Couto

curso 2019-2020

Ángulo entre dos rectas

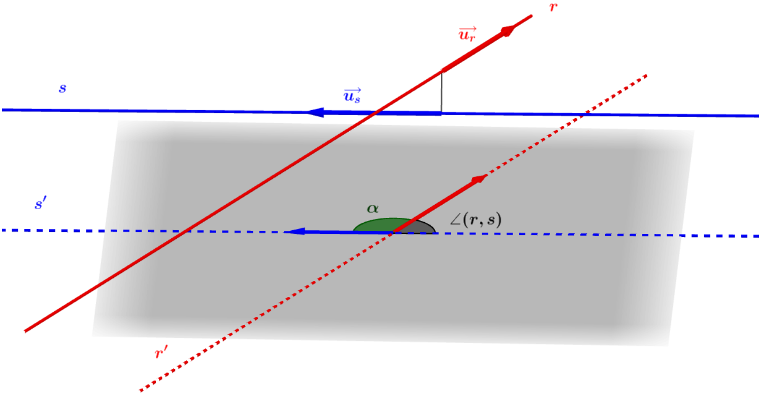
Ángulo entre dos rectas secantes

El ángulo que forman dos rectas r y s que se cortan, $\angle(r,s)$, es el menor de los ángulos que forman en el plano que las contiene.



Ángulo entre dos rectas que se cruzan

El ángulo que forman dos rectas r y s que se cruzan, se define como el ángulo que forman dos rectas r' y s' que son secantes, y verificando que r' es paralela a r, y s' es paralela a s.



Cálculo de $\angle(r, s)$

Si $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ son los vectores directores de las rectas r y s, el ángulo $\angle(r, s)$ se deduce del producto escalar de dichos vectores, dado que si $\alpha = \angle(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s})$, se tiene:

$$\cos\,\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}|}$$

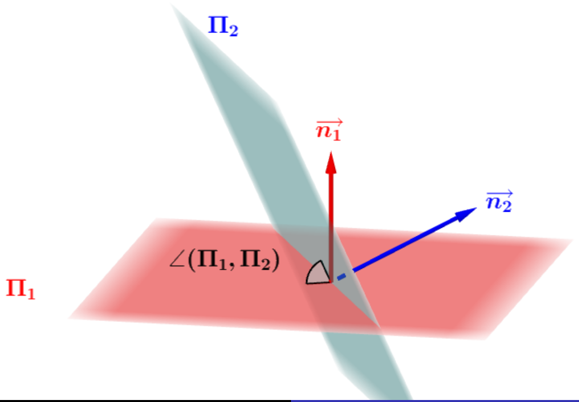
Como el ángulo α puede estar comprendido entre 0° y 180°, y el ángulo $\angle(r, s)$ se define como el menor que forman, este puede definirse entonces como

$$\angle(r, s) = \arccos\left(\frac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}|}\right)$$

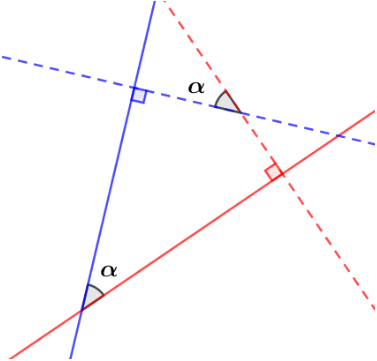
Ángulo entre dos planos

Ángulo entre dos planos secantes

El ángulo entre dos planos secantes Π_1 y Π_2, $\angle(\Pi_1, \Pi_2)$, se define como el menor ángulo diedro determinado por ellos.



En el plano, el ángulo formado por dos rectas coincide con el ángulo formado por las rectas perpendiculares a las primeras.



En esto se basa el modo de calcular el ángulo entre dos planos secantes en el espacio.

Cálculo de $\angle(\Pi_1, \Pi_2)$

Si $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ son los vectores normales a los planos, el ángulo $\angle(\Pi_1, \Pi_2)$ se deduce del producto escalar de dichos vectores normales, dado que si $\alpha = \angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})$, se tiene se tiene:

$$\cos\,\alpha = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

Como el ángulo α puede estar comprendido entre 0° y 180°, y el ángulo $\angle(\Pi_1, \Pi_2)$ se define como el menor que forman, este puede definirse entonces como

$$\angle(\Pi_1, \Pi_2) = \arccos\left(\frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right)$$

Ángulo entre una recta y un plano

El ángulo de una recta r y un plano Π, $\angle(r, \Pi)$, se define como el menor ángulo que forma r con la recta r' que resulta de proyectar r sobre Π

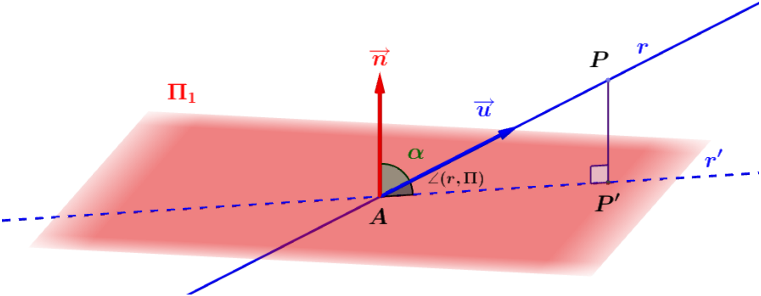


Imagen: $\angle(r, \Pi) = \angle(P'AP) \implies \text{sen } \angle(\vec{u}, \vec{n}) = |\cos \alpha| = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

Cálculo de $\angle(r, \pi)$

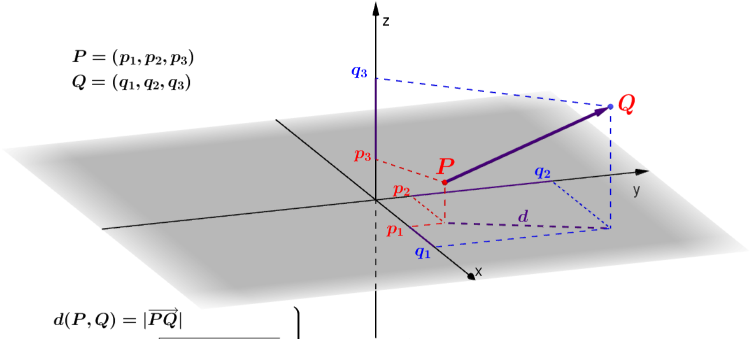
El ángulo entre una recta r con vector director $\overrightarrow{u}$, y un plano Π con vector normal $\overrightarrow{n}$ se deduce del producto escalar de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{n}$, ya que sen $\angle(r, \Pi) = \cos\alpha$, con $\alpha = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n})$. Por tanto:

$$\text{sen } \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}) = |\cos\,\alpha| = \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{n}|}$$

Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^3$, la distancia entre ellos, $d(P,Q)$ es el módulo del vector fijo $\overrightarrow{PQ}$. Es decir $d(P,Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$

$P = (p_1, p_2, p_3)$
$Q = (q_1, q_2, q_3)$



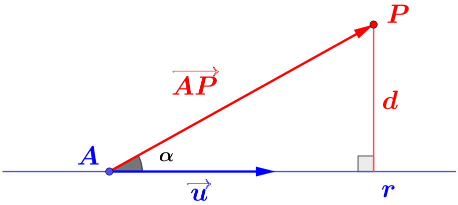
$$\left.\begin{array}{l} d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| \\ d(P,Q) = \sqrt{d^2 + (q_3 - p_3)^2} \\ d = \sqrt{(q_1 - q_2)^2 + (p_2 - p_1)^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow d = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

Distancia de un punto a una recta

Dada una recta r con vector director $\overrightarrow{u}$, y un punto $P \in \mathbb{R}^3$, la distancia del punto P a r se calcula con la expresión

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{u}|} \quad \text{con } A \in r$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{d}{|\overrightarrow{AP}|} \\ |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{AP}| \operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow d = \frac{|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AP}|}$$

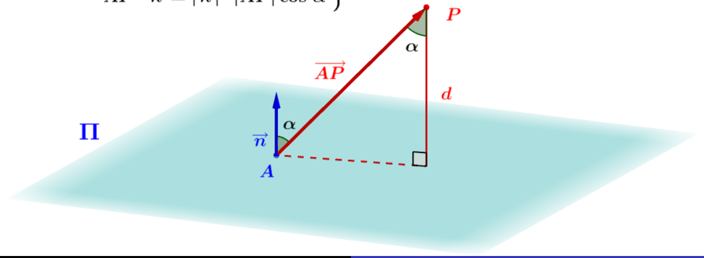


Distancia de un punto a un plano

Dado un plano Π con vector normal $\overrightarrow{n}$, y un punto $P \in \mathbb{R}^3$, la distancia de P a Π se calcula con la expresión

$$d(P,\Pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|} \quad \text{con } A \in \Pi$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{d}{|\overrightarrow{AP}|} \\ \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n} = |\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{AP}| \cos\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow d = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$$



Fórmula analítica de $d(P, \pi)$

Si $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $\pi : n_1x + n_2y + n_3z + d = 0$, como $A = (a_1, a_2, a_3) \in \pi$, entonces:

$$n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 + d = 0$$

$$d = -a_1n_1 - a_2n_2 - a_3n_3$$

Es decir:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n} = (p_1 - a_1, p_2 - a_2, p_3 - a_3) \cdot (n_1, n_2, n_3) =$$

$$= p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3 - a_1n_1 - a_2n_2 - a_3n_3 = p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3 + d$$

Por tanto:

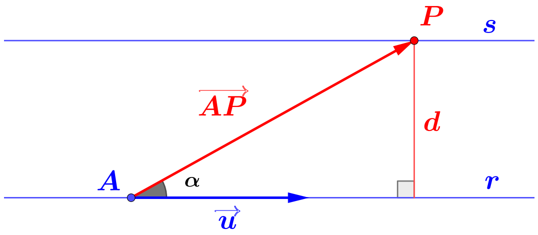
$$d(P, \pi) = \frac{|n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3 + d|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Distancia entre dos rectas

Distancia entre dos rectas paralelas

Dadas dos rectas r y s paralelas, con dirección $\overrightarrow{u}$, la distancia entre las rectas se calcula eligiendo un punto $P \in s$, y calculando $d(P, r)$

$$d(r,s) = d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{u}|} \quad \text{con } A \in r, P \in s$$



Distancia entre dos rectas que se cruzan

Dadas dos rectas r y s que se cruzan, con vectores directores $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ respectivamente, la distancia entre ellas viene dada por la longitud del vector fijo $\overrightarrow{PQ}$, donde:

$$P \in r, \quad \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{u_r}$$

$$Q \in s, \quad \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{u_s}$$

Es decir, $d(r,s) = |\overrightarrow{PQ}|$ verificando:

$$\begin{array}{l} P \in r, Q \in s \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{u_s} = 0 \end{array}$$

Ahora bien, para determinar la distancia entre ambas rectas, realmente no es necesario obtener las coordenadas de P y Q. Basta con calcular el plano Π_s que contiene a la recta s, y es paralelo a la recta r, y calcular la distancia de cualquier punto $B \in r$ al plano Π_s

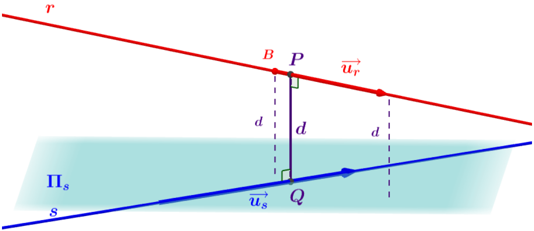


Imagen: $d(r, s) = d(B, \Pi_s)$

Cálculo de $d(r, s)$

- Si utilizamos la fórmula de la distancia de $B \in r$ al plano Π_s, entonces $d(B, \Pi_2) = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$, (siendo $\overrightarrow{n}$ el vector normal al plano, y $A \in \Pi_s$).
- Pero como el vector normal al plano Π_s tiene por construcción la dirección del vector $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$, si elegimos $A \in s \subset \Pi_s$ también podremos calcular $d(r, s)$ sin calcular la ecuación de Π_2:

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s})|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$$

- De la definición de producto mixto, finalmente se obtiene la fórmula que se utiliza habitualmente:

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$$

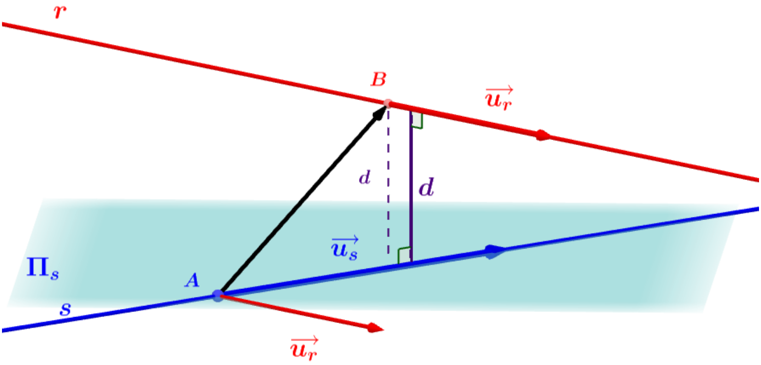
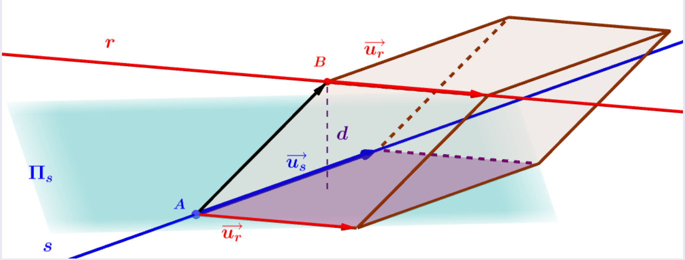


Imagen: $d(r,s) = \dfrac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$

Interpretación geométrica

El volumen del paralelepípedo de terminado por $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_s}$, y $\overrightarrow{AB}$ es el valor absoluto del producto mixto de dichos vectores: $|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|$
Por otra parte, el volumen también es el resultado de multiplicar el área de la base, $|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|$, por la altura, d.



Por tanto, $d = d(r, s)$ es la altura del paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_s}$, y $\overrightarrow{AB}$

Distancia de una recta r a un plano Π

Cálculo de $d(r, \Pi)$

Dada una recta r paralela a un plano Π de vector normal $\vec{n}$. Para calcular $d(r, \Pi)$ basta elegir cualquier $P \in r$, y calcular $d(P, \Pi)$

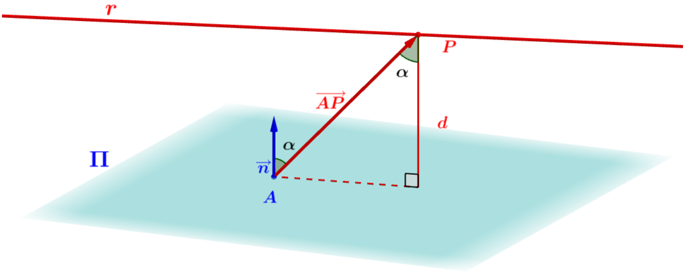


Imagen: $d(r, \Pi) = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ con $A \in \Pi$, $P \in r$

Distancia entre dos planos paralelos

$d(\Pi_1, \Pi_2)$

Dados dos planos paralelos Π_1 y Π_2, la distancia entre ellos se calcula eligiendo un punto cualquiera $P \in \Pi_1$, y calculando su distancia a Π_2.

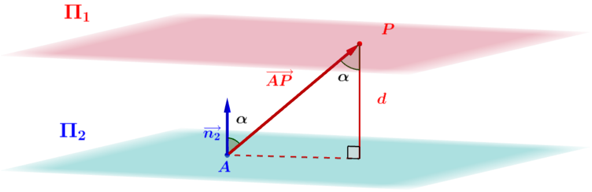


Imagen: $d(r, \Pi) = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$ con $A \in \Pi_2$, $P \in \Pi_1$