Ejercicios de Geometría Analítica en el Espacio (II)

Ejercicio 24 *Determinar la posición relativa de las siguientes parejas de rectas. Si son secantes calcula el punto de corte, y el ángulo que forman.*

a) $r: x = y = \dfrac{1-z}{-2}; \quad s: (x, y, z) = (2, -1, 4) + \lambda(2, -1, 1).$

b) $r: \begin{cases} x + 3z + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} ; \quad s: \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

c) $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 - 3t \end{cases} ; \quad s: \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha \\ z = 2 - 3\alpha \end{cases}$

d) $r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + y - z = -3 \end{cases} ; \quad s: \begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ -y + z = 4 \end{cases}$

e) $r: \dfrac{2x-1}{4} = -y = 1 - z; \quad s: \begin{cases} 2x + 2y - 2z + 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Ejercicio 25 *Dadas las rectas* $r: \begin{cases} x = az + 2 \\ y = z - 3 \end{cases} ; \quad s: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{b} = z$ *, determinar los valores a y b para que sean coplanarias y ortogonales, y hallar la ecuación del plano que las contiene.*

Ejercicio 26 *Calcular k para que las rectas* $r: \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -7 + \lambda \end{cases}$ *y* $s: \begin{cases} x + ky + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$ *sean paralelas.*

Ejercicio 27 *Dadas las rectas* $r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ y + z = -1 \end{cases}$ *y* $s: \begin{cases} x - z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$*, determinar la posición relativa, y hallar la ecuación de la recta t que pasa por el punto $P = (-5, 2, 5)$, y se apoya en ambas.*

Ejercicio 28 *Dadas las rectas* $r: \begin{cases} x + 3z + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ *y* $s: \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

a) Determinar su posición relativa, y averiguar si existe algún plano perpendicular a s y que contenga a r.

b) Determinar la ecuación de la recta t perpendicular a las rectas r y s.

c) Calcular la distancia entre r y s, y determinar el punto M que equidista de r y s.

Ejercicio 29 *Dadas las rectas* $r: \dfrac{x-1}{2} = y = a - z$ *y* $s: \dfrac{x+1}{3} = y - 2 = z$*, se pide:*

a) Hallar el valor de a para que se corten en un punto, y para dicho valor, encontrar la ecuación el plano π que las contiene.

IES Couto

b) *Hallar la ecuación de la recta proyección de la recta* $t: x = \dfrac{y}{2} = -\dfrac{z}{3}$ *sobre el anterior plano* π.

Ejercicio 30 *Calcular el valor de* k *para que la recta* $r: \begin{cases} 4x - y + z = -2 \\ 3x - y + kz = -2 \end{cases}$ *y la recta* $s: \begin{cases} 2x + 4y + 2z = -1 \\ 2x + ky + z = -1 \end{cases}$ *se corten en un punto. Calcular para dicho valor la ecuación del plano* π *que las contiene, y la distancia de* $A = (1, 2, 1)$ *a* π.

Ejercicio 31 *Dadas las rectas* $r: \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ *y* $s: \begin{cases} 2x = 1 \\ z = k \end{cases}$ *determinar las posiciones relativas en función de* k*, y la distancia entre ellas cuando se cruzan.*

Ejercicio 32 *Dadas las rectas* $r: \begin{cases} x = 1 + a(y-2) \\ x = z \end{cases}$ *y* $s: \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ ax - z = 2a - 2 \end{cases}$

a) *Determinar su posición relativa en función de* a.

b) *Calcular las coordenadas del punto de corte cuando sean secantes, y el ángulo que forman.*

c) *Para* $a = 2$*, determinar la ecuación de la recta* t *perpendicular a ambas.*

Ejercicio 33 *Dadas las rectas* $r: \begin{cases} ax - y = 2a + 2 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$ *y* $s: \begin{cases} by - 2z = b \\ x + y = 2 \end{cases}$

a) *Calcular los valores de* a *y* b *para que sean paralelas, y para dichos valores, la ecuación del plano* π *que las contiene.*

b) *Para los valores encontrados, si se apoya un cubo por una de sus caras sobre el plano* π*, de forma que una arista está sobre* r*, y la otra sobre* s*, calcula el volumen del cubo.*

Ejercicio 34 *Dadas las rectas* $r: \begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ ax - 3z + 3 = 0 \end{cases}$ *y* $s: \begin{cases} x - 2ay + 4a - 1 = 0 \\ 2y - z - 4 = 0 \end{cases}$

a) *Determinar la posición relativa en función del parámetro* a.

b) *Averiguar si existe algún valor de* a *para el cual sean coplanarias. En dichos casos, encotrar la ecuación del plano.*

Ejercicio 35 *Dadas* $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ *y* $s: \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{3-z}{2}$.

a) *Hallar la ecuación de la recta* t *que pasa por el origen de coordenadas, y se apoya en* r *y* s.

b) *Calcular el ángulo que forman* r *y* t.

c) *Calcular la distancia entre* r *y* s.

Ejercicio 36 *Hallar la distancia entre la recta* r *que pasa por* $A = (2, -1, 1)$ *y* $B = (6, 8, 0)$*, y la recta* s *que pasa por* $C = (2, 1, 2)$ *y* $D = (0, 2, 1)$*, y determinar la ecuación de la recta perpendicular a ambas y que se apoya en ellas.*

Ejercicio 37 *Dadas* $r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$, *y* $r_2 : \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{3-z}{2}$

a) *Hallar la ecuación de la recta* s *que pasa por el origen de coordenadas y se apoyan en* r_1 *y* r_2.

b) *Hallar la distancia entre* r_1 *y* r_2.

Ejercicio 38 *Estudiar la posición relativa de los planos* $\pi_1 : 2x + 3y - 5z + 1 = 0$, $\pi_2 : x + 2y - z + 12 = 0$, *y* $\pi_3 : 4x + 7y - 7z + 5 = 0$

Ejercicio 39 *Discutir en función de los valores de* a *la posición relativa de los planos* $\pi_1 : 3x - ay + 2z - (a-1) = 0$, $\pi_2 : 2x - 5y + 3z - 1 = 0$, *y* $\pi_3 : x + 3y - (a-1) = 0$

Ejercicio 40 *Determinar los valores del parámetro* a *para que* $r : \begin{cases} 3x + ay + z - 1 = 0 \\ 2x + 6y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$ *esté en el plano* $\pi : x + y + z + 1 = 0$.

Ejercicio 41 *Determinar el punto de la recta* $r : \frac{x-3}{=}\frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$ *que equidista de los planos* $\pi_1 : 2x - 3y - 6z + 3 = 0$ *y* $\pi_2 : 4x + 3y + 3 = 0$

Ejercicio 42 *Estudiar la posición relativa de los planos* $\pi_1 : 2x + 3y - 5z + 1 = 0$, $\pi_2 : x + 2y - z + 12 = 0$, $\pi_3 : 4x + 7y - 7z + 5 = 0$.

Ejercicio 43 *Estudiar en función de los valores de* k *la posición relativa de los planos* $\pi_1 : kx - 2y + z - 1 = 0$, $\pi_2 : x - 2ky + kz - 3 = 0$, $\pi_3 : x - 4y + kz - k = 0$

Ejercicio 44 *Determinar* a *y* b *para que los planos de ecuaciones* $\pi_1 : 2x - y + z = 3$, $\pi_2 : x - y + z = 2$, *y* $\pi_3 : 3x - y - az = b$ *se corten en una recta* r, *y hallar la ecuación del plano que contiene a* r *y pasa por* $A = (1, 2, 3)$

Ejercicio 45 *Dados los planos* $\pi_1 : x + y + z = -3$ *y* $\pi_2 : \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 - \mu \end{cases}$, *y la recta* $r : \frac{x-3}{2} = y = \frac{z-3}{3}$

a) *Determinar la posición relativa de* π_1 *y* π_2, *y el ángulo que forman o la distancia entre ellos según sean secantes o paralelos.*

b) *Determinar la posición relativa de* r *y* π_1, *y la de* r *y* π_2, *y la distancia de la recta a los planos, o el ángulo que forma con cada uno de ellos según sea secante o paralela a los mismos.*

c) *Determinar un punto de* r *que equidiste de* π_1 *y* π_2.

Ejercicio 46 *Hallar los puntos del plano* $\pi : x - 2y = 0$ *que están a distancia* 1 *del plano* $\Sigma : 2x - y + 2z = 3$

Ejercicio 47 *Determinar los valores del parámetro* a *para que los planos* $\pi_1 : x + y + az = 1$, $\pi_2 : ax + y + z = 1$, $\pi_3 : 2x + y + z = a$ *tengan una recta en común, y hallar el vector director de dicha recta.*

Ejercicio 48 *Dada* $r : \begin{cases} x = 1 \\ 3y - 4z = 18 \end{cases}$.

a) *Hallar la ecuación de la recta* s *que corta perpendicularmente a* r *y pasa por* $A = (1, -1, 1)$, *y calcular* $P = r \cap s$.

b) *Hallar la distancia* d *entre* A *y* P, *y obtener los puntos de* r *cuya distancia a* P *es* $2d$. *Llamando* Q *a uno cualquiera de estos puntos, obtener las coordenadas del cuarto vértice del rectángulo determinado por* A, P *y* Q.

Ejercicio 49 *Dada la recta* $r : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$, *y el plano* $\pi : x + y - z - 6 = 0$.

a) *Determinar el punto* P *intersección de* r *y* π, *y el punto* R *de* π *más próximo al punto* $Q = (6, -3, -1)$ *de* r.

b) *Calcular el área del triángulo de vértices* P, Q, *y* R.

Ejercicio 50 *Dadas las rectas* $r : \begin{cases} x = 1 + a(y - 2) \\ x = z \end{cases}$ *y* $s : \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ ax - z = 2a - 2 \end{cases}$. *Se pide:*

a) *Determinar la posición relativa según los valores de* a.

b) *Tomando* $a = 0$, *determinar los puntos* $P \in r$ *y* $Q \in s$ *tales que la distancia entre* P *y* Q *sea mínima.*

Ejercicio 51 *Determinar el lugar geométrico de los puntos del espacio que distan* 3 *unidades del plano* $2x + 4y - 4z = 3$

Ejercicio 52 *Se consideran los planos* $\pi_1 : x + ky + z = k + 2$, $\pi_2 : x + y + kz = -2(k + 1)$, $\pi_3 : kx + y + z = k$.

a) *Determinar, según los valores de* k, *las posiciones relativas de los tres planos.*

b) *Para* $k = -1$, *hallar* $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$

Ejercicio 53 *Dada* $r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$, *y* $\pi : x + my - z - 6 = 0$, *determinar* m *para que:*

a) π *sea paralelo a* r. *Hallar la distancia entre* π *y* r.

b) π *sea perpendicular a* r. *Hallar el punto de intersección.*

c) *¿Existe algún valor de* m *para el cual* $r \subset \pi$*?*

Ejercicio 54 *Dadas las rectas* $r : \begin{cases} 4x + 2y - z = 9 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ *y* $s : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ ax - 2y = -2 \end{cases}$.

a) *Determinar los valores de* a *para que las rectas se crucen.*

b) *Determinar los valores de* a *para que sean paralelas, y para dichos valores, determinar la ecuación del plano* π *que contiene a* r *y a* s, *y encontrar el punto* $A \in \pi$ *que está más próximo al origen de coordenadas.*

Ejercicio 55 *Dados los planos* $\pi_1 : x - y + z = 0$ *y* $\pi_2 : x + y - z - 2 = 0$.

a) Determinar su posición relativa.

b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A = (1, 2, 3)$ *y no corta a* π_1 *ni a* π_2.

Ejercicio 56 *Dados* $A = (0, 1, -2)$, $B = (1, 2, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ *y* $D = (1, 0, m)$.

a) Determinar el valor de m *para que sean coplanarios.*

b) Calcular el punto $A \in \pi$, *con* $\pi : x + y - z - 2 = 0$ *más próximo a* C.

Ejercicio 57 *Calcular la ecuación de la recta simétrica de* $r : \frac{x-1}{1} = -\frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ *respecto del plano* $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$.

Ejercicio 58 *Dado el plano* $\pi : 2x - y = 2$ *y la recta* $r : \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$

a) Determinar la posición relativa de r *y* π. *Si son paralelos, calcula la distancia entre ellos, y si no, calcular el ángulo que forman.*

b) Determinar el plano que contiene a r *y es perpendicular a* π.

c) Determinar la recta que pasa por $A = (-2, 1, 0)$, *corta a* r, *y es paralela a* π.

Ejercicio 59 *El vértice* A *de un triángulo rectángulo está en la recta* $r : \begin{cases} x = 3 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$, *y su hipotenusa tiene los vértices en los puntos* $B = (2, 1, -1)$ *y* $C = (0, -1, 3)$.

a) Calcular las coordenadas de A *y el área de* $\Delta\, ABC$.

b) Calcular la posición relativa de r *y la recta que pasa por* B *y* C.

Ejercicio 60 *Una recta* r *pasa por* $P = (2, -1, 0)$ *y tiene el vector director* $(1, \lambda, -2)$, *y una recta* s *pasa por* $Q = (1, 0, -1)$ *con vector director* $(2, 4, 2)$.

a) Calcular $\lambda > 0$ *para que* $d(r, s) = \frac{9}{59}$.

b) Calcular λ *para que* r *sea perpendicular a la recta que pasa por* P *y* Q.

Ejercicio 61 *Dadas* $r : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$ *y* $s : \begin{cases} 2x - y = 2 \\ y - 2z = -2 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r *y* s.

b) Encontrar, si es posible, la ecuación implícita del plano perpendicular a ambas que pasa por $A = (0, -2, 0)$.

c) Encontrar la distancia entre r *y* s

Ejercicio 62 *Dada* $r : \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ *y* $\pi : x + 2y + 3z - 1 = 0$, *hallar las ecuaciones de la recta contenida en* π, *perpendicular a* r, *y que pasa por* $P = (2, 1, -1)$

Ejercicio 63 *a)* *¿Puede haber dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-3$, $|\overrightarrow{u}|=1$ y $\overrightarrow{v}=2$?*

b) *Hallar el valor de a para que exista una recta que pase por el punto $P=(1+a,1-a,a)$, corte a la recta $r:\begin{cases} x+y=2 \\ z=1 \end{cases}$ y sea paralela a la recta $s:\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$*

Ejercicio 64 *Dados los planos $\pi_1: 2x-3y+z=0$ y $\pi_2:\begin{cases} x=1+\lambda+\mu \\ y=\lambda-\mu \\ z=2+2\lambda+\mu \end{cases}$, y el punto $P=(2,-3,0)$. Se pide:*

a) *Hallar la ecuación continua de la recta r que pasa por P y es paralela a la recta $s=\pi_1\cap\pi_2$*

b) *Calcula el ángulo entre π_1 y π_2*

Ejercicio 65 *Dada $r:\begin{cases} 3x-y-z=0 \\ 2x+y-4z=0 \end{cases}$*

a) *Calcular la ecuación implícita del plano paralelo a r y que pasa por $A=(0,1,2)$ y $B=(5,3,1)$.*

b) *Calcular el punto de corte de r con el plano perpendicular a r y que pasa por B.*

c) *Calcular la ecuación general del plano paralelo a $2x-3y+4z-5=0$ y dista $\sqrt{29}$ unidades de la recta r.*

Ejercicio 66 *Encontrar la ecuación de la recta paralela a los planos de ecuaciones $\pi_1: x-3y+z=0$ y $\pi_2: 2x-y+3z-5=0$, y que pasa por $P=(2,6,5)$, y la distancia de dicha recta a π_1*

Ejercicio 67 *Dados los planos $\pi_1: 4x+6y-12z+1=0$ y $\pi_2: -2x-3y+6z-5=0$.*

a) *Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.*

b) *Para el cuadrado de vértices consecutivos $ABCD$, con $A=(2,1,3)$ y $B=(1,2,3)$, calcular los vértices C y D, sabiendo que $C\in\pi_2\cap\pi_3$ (siendo $\pi_3: x-y+z=2$)*

Ejercicio 68 *Sean los planos $\pi_1: x+y+z=0$ y π_2. Su intersección es la recta $r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$. Calcular:*

a) *La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A=(1,1,1)\in\pi_2$*

b) *La ecuación del plano π_3, paralelo a π_1 y a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de r.*