Bloque de Geometría (I): Ejercicios de vectores

1

Dados los vectores $\vec{v} = (1, 2, 4)$ y $\vec{w} = (3, 5, -1)$, determine otro vector que sea perpendicular a ambos y de módulo 2.

2

Halle el valor de k para que los vectores $\vec{u}(-1, 5, 6-k)$, $\vec{v}(1, 2, 3)$, $\vec{w}(3, -1, k)$ sean coplanarios.

3

Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justifique su respuesta. Para las afirmaciones que considere que son falsas ponga un ejemplo ilustrativo.

a. Si tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cumplen $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ entonces $\vec{v} = \vec{w}$

b. No existen dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cumpliendo $|\vec{v}| = 1$, $|\vec{w}| = 2$ y $|\vec{v} \cdot \vec{w}| = 3$

c. Si tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, son linealmente independientes, entonces también lo son los vectores: $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

4

a. Pruebe que si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo, entonces los vectores $\overrightarrow{u+v}$ y $\overrightarrow{u-v}$ son ortogonales.

b. Considere los vectores $\vec{x} = (-1, 2, 3)$ e $\vec{y} = (2, 3, -1)$. Razone si son linealmente independientes los vectores $\overrightarrow{x+y}$ y $\overrightarrow{x-y}$

c. Calcule el área del paralelogramo que tiene tres vértices consecutivos en los puntos: (1, 5, 2), (0, 0, 0) y (−3, −1, 4).

5

¿Para qué valores de k el sistema de vectores

$\{(1, 1, 1), (k, 1, -1), (-2, k, 0)\}$

es una base?

6

a. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 17$ y $|\vec{u}| = 9$. Calcule el módulo del vector $\vec{v}$.

b. Considere los vectores $\vec{a} = (2, -1, 4)$ y $\vec{b} = (0, 3, m)$ con $m \in \mathbb{R}$

1. Halle el valor de m para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales.
2. Para $m = 0$ calcule el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

7

Dados los vectores $\vec{a}$ (2, 6, 1) y $\vec{b}$ (5, 1, 0), calcule:

a. Las coordenadas de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{b}$.

b. Un vector de la misma dirección que $\vec{b}$ y cuyo módulo sea igual al de la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$. (Vector proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$).

8

La base de una pirámide de base triangular está determinada por los vectores $\vec{a}(1, 2, 2)$ y $\vec{b}(4, 1, 2)$, mientras que una de las aristas laterales es el vector $\vec{c}(0, 5, 1)$.

Calcule:

a. El volumen de la pirámide.

b. La altura de la pirámide.

9

Halle un vector $\vec{u}$ de la misma dirección que $\vec{v} = (1, -2, 3)$, y tal que forme con $\vec{w} = (-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área 25 u^2.

10

Obtenga el valor de m para que los puntos A(2, -3, 1), B(5, 0, 2) y C(14, m, 5) estén alineados.

11

a. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores ortogonales y de módulo uno. Halle los valores del parámetro a para que los vectores $\vec{u} + a\,\vec{v}$ y $\vec{u} - a\,\vec{v}$ formen un ángulo de 60º.

b. Halle un vector $\vec{z}$ de módulo uno y que sea ortogonal a los vectores $\vec{x} = (1, 2, 1)$ e $\vec{y} = (0, 1, 1)$.

c. Justifique si es verdadera o falsa la afirmación siguiente. Si la considera falsa, ponga un ejemplo ilustrativo.

"Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son tres vectores no nulos que cumplen $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, entonces $\vec{b} = \vec{c}$"

12

Se consideran los vectores

$$\vec{u} = (1,2,3) \quad , \quad \vec{v} = (1,-2,-1) \quad \text{y} \quad \vec{w} = (2,\alpha,\beta)$$

donde α y β son números reales.

a. Determine los valores de α y β para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b. Determine los valores de α y β para los que $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

c. Para $\alpha = 8$, determine el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.