Solución a los ejercicios de Problemas Métricos

1 106

a. $P_1 = (1,2,1)$, $P_2 = (2,3,1)$, $P_3 = (-1,4,3)$, $P_4 = (0,5,3)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (1,1,0)$; $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2,2,2) = 2(-1,1,1)$; $\overrightarrow{P_1P_4} = (-1,3,2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, rango $\left\{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right\} = 2$, y los tres vectores son coplanarios y también los cuatro puntos. Tomando el primero y el segundo como vectores de dirección del plano buscado, resulta: $\boxed{\pi: (1+\lambda-\mu,\ 2+\lambda+\mu,\ 1+\mu)\ ,\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}}$

b. $$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_3} = (1,1,0)\cdot(-2,2,2) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \perp \overrightarrow{P_1P_3} \\ \overrightarrow{P_3P_4} = (1,1,0) = \overrightarrow{P_1P_2} \Rightarrow P_1P_2P_4P_3 \text{ es paralelogramo} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P_1P_2P_4P_3 \text{ es un rectángulo}}$$

c. Área $= \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{P_1P_3}\right| = \sqrt{2}\cdot\sqrt{12} = \boxed{\sqrt{24}}$

2 107

a. $r_1 \equiv x = y = \frac{z-1}{2}$ $\begin{cases} P = (0,0,1) \\ \vec{u} = (1,1,2) \end{cases}$

$r_2 \equiv (x,\ y,\ z) = (2,\ -1,4) + t(2,\ -1,1)$ $\begin{cases} Q = (2,\ -1,4) \\ \vec{v} = (2,\ -1,1) \end{cases}$

$\overrightarrow{PQ} = (2,-1,3)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}\left\{\overrightarrow{PQ},\ \vec{u},\ \vec{v}\right\} = 3$$ y, por tanto, $\boxed{r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}}$ [4 pt]

b. $R = (1,1,0)$

$1 = 1 = \frac{0-1}{2}$ Falso, $\boxed{R \notin r_1}$ [1,5 pt]

$(1,1,0) = (2,\ -1,4) + t(2,\ -1,1)$

$(-1,2,-4) = t(2,\ -1,1)$ Falso, no son proporcionales, $\boxed{R \notin r_2}$ [1,5 pt]

c. Plano π que contiene a r_1 y es paralelo a r_2

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;\ \pi: 3x+3y-3z+3 = 0\ ;\ \boxed{\pi: x+y-z+1=0}$$ [3 pt]

3 109

$r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$ $\quad P_1 \equiv 2x-3y-6\,z+3 = 0$

$\quad P_2 \equiv 4x+3y+3 = 0$

$$r \equiv \begin{cases} x = 3+t \\ y = -2+2t \\ z = 1+3t \end{cases}$$

plano mediatriz de P_1 y P_2:

$$\underbrace{\frac{|2x-3y-6\,z+3|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-6)^2}} = \frac{|4x+3y+3|}{\sqrt{4^2+3^2}}}_{[2\ \text{p}]}\ ;\ \frac{|2x-3y-6\,z+3|}{7} = \frac{|4x+3y+3|}{5}$$

$5|2x-3y-6\,z+3| = 7|4x+3y+3|$; $5(2x-3y-6\,z+3) = \pm 7(4x+3y+3)$

se obtienen, así, dos planos perpendiculares entre sí:

$\pi_1 \equiv 3x + \underbrace{6y+5z+1=0\ ;\ \pi_2 \equiv 19x+3y-15}_{[2\ \text{p}]}z + 18 = 0$

punto de corte de r con π_1: $3(3+t)+6(-2+2t)+5(1+3t)+1 = 0$; $t = -1/10$

sustituyendo en las ecuaciones paramétricas de r:

$\boxed{A(29/10,\ -22/10,\ 7/10)}$

punto de corte de r con π_2: $19(3+t)+3(-2+2t)-15(1+3t)+18 = 0$; $t = 27/10$

$\boxed{B(57/10,\ 34/10,\ 91/10)}$

4 110

$2x+3y-5z+1=0$

$x+2y-z+12=0$

$4x+7y-7z+5=0$

$$M'=\left(\underbrace{\begin{matrix}2 & 3 & -5\\1 & 2 & -1\\4 & 7 & -7\end{matrix}}_{M}\left|\begin{matrix}-1\\-12\\-5\end{matrix}\right.\right)$$

$$|M|=\begin{vmatrix}2 & 3 & -5\\1 & 2 & -1\\4 & 7 & -7\end{vmatrix}=0$$

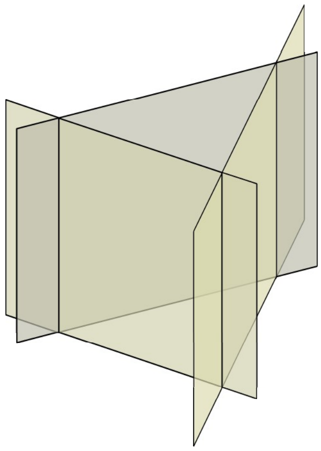
Por tanto, los tres planos no tienen ningún punto en común.

Además

$$\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{vmatrix}=1\ ;\ \begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 7\end{vmatrix}=2\ ;\ \begin{vmatrix}1 & 2\\4 & 7\end{vmatrix}=-1$$

Por lo que ninguno es paralelo a otro.

Son, en definitiva, $\boxed{\text{planos que se cortan dos a dos}}$



5 111

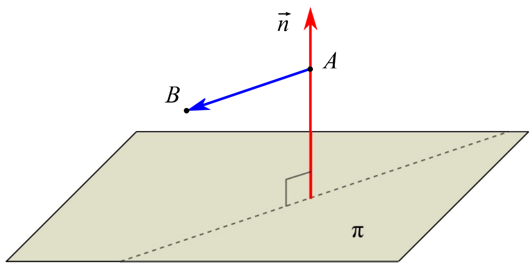
$A(1,0,-1)\ ,\ B(t,3,0)\ ,\ \pi: 2x-y+4z-1=0$

$\overrightarrow{AB}=(t-1,3,1)$

vector normal de π: $\vec{n}=(2,-1,4)$

los dos vectores han de ser perpendiculares y cero su producto escalar:

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=(t-1,3,1)\cdot(2,-1,4)=2t-1=0\Rightarrow \boxed{t=1/2}$



6 113

$r_1\equiv\frac{x-2}{2}=\frac{y-k}{3}=\frac{z}{-1}$

$r_2\equiv\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$

$$r_1\equiv\begin{cases}x=2+2\lambda\\y=k+3\lambda\\z=-\lambda\end{cases};\ r_2\equiv\begin{cases}x=-2-\mu\\y=1+2\mu\\z=3+3\mu\end{cases}$$

En el punto de corte:

$$\begin{cases}2+2\lambda=-2-\mu\\k+3\lambda=1+2\mu\\-\lambda=3+3\mu\end{cases},\ \begin{cases}2\lambda+\mu=-4\\3\lambda-2\mu=1-k\\-\lambda-3\mu=3\end{cases}$$

Para que el sistema sea compatible determinado (rango = 2), el determinante de la matriz ampliada ha de ser cero.

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & -4\\3 & -2 & 1-k\\-1 & -3 & 3\end{vmatrix}=0\ ;\ 28-5k=0\ ;\ \boxed{k=\frac{28}{5}}$$

Tomando el punto $Q=(-2,1,3)$ de r_2 y los dos vectores de dirección:

$$\pi:\begin{vmatrix}2 & -1 & x+2\\3 & 2 & y-1\\-1 & 3 & z-3\end{vmatrix}=0\ ;\ \boxed{\pi: 11x-5y+7z+6=0}$$

7 115

$A(1,0)\ ;\ B(0,2)\ ;\ C(x,x)$

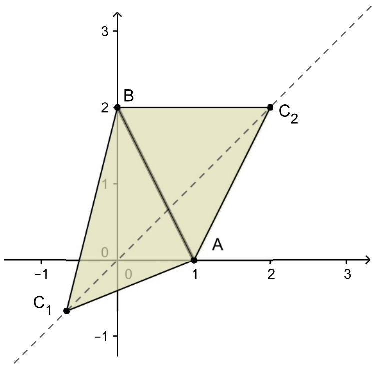
El problema se puede abordar desde la geometría del espacio mediante el producto vectorial.

$\overrightarrow{AB}=(-1,2)\ ;\ \overrightarrow{AC}=(x-1,x)$

$$\text{Área}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\-1 & 2 & 0\\x-1 & x & 0\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}|(0,0,-3x+2)|=\frac{1}{2}|-3x+2|$$

$$\text{Área}=\frac{1}{2}|-3x+2|=2$$

$$|-3x+2|=4\ ;\ -3x+2=\pm4\ ;\ x=\frac{-2\pm4}{-3}=\begin{cases}\frac{2}{3} & \boxed{C_1=\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)}\\2 & \boxed{C_2=(2,2)}\end{cases}$$



8 116 $3x - ay + 2z - (a-1) = 0$

$2x - 5y + 3z - 1 = 0$

$x + 3y - (a-1)z = 0$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -a & 2 & a-1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1-a & 0 \end{array}\right)$$

(the 3×3 part labelled M)

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 1-a \end{vmatrix} = -2(a-2)(a-5) \quad [1\ p]$$

$\boxed{\forall a \neq 2, 5\ ,\ |M| \neq 0\ ,\ \text{rango } M = 3\ ,\ \text{solución única; los planos se cortan en un punto}}$ [3 p]

Para $a = 2$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \ ; \ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rango } M' = 2$$

$\boxed{a = 2\ ,\ \text{rango } M = \text{rango } M' = 2\ ,\ \text{infinitas soluciones; los planos se cortan en una recta}}$ [3 p]

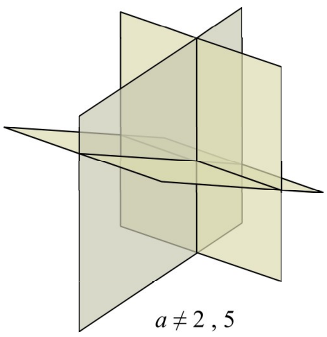
Para $a = 5$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \ ; \ \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 2$$

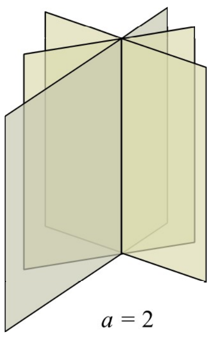
$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M' = 3$$

Además, ningún plano es paralelo a ninguno de los otros dos.

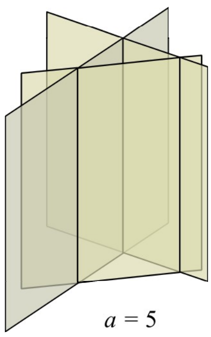
$\boxed{a = 5\ ,\ \text{rango } M = 2 \neq \text{rango } M' = 3\ ,\ \text{sin solución; planos se cortan dos a dos}}$ [3 p]



$a \neq 2\ ,\ 5$



$a = 2$



$a = 5$

9
117

$$r_1:\begin{cases} x = az+2 \\ y = z-3 \end{cases} \quad r_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{b} = z$$

Pasando las ecuaciones a forma paramétrica resulta:

$$r_1:\begin{cases} x = 2+a\lambda \\ y = -3+\lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \quad r_2:\begin{cases} x = 1+2\mu \\ y = -1+b\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Que proporcionan puntos y vectores de dirección:

$$r_1:\begin{cases} P(2,\,-3,0) \\ \vec{u}(a,\,1,1) \end{cases} ; \quad r_2:\begin{cases} Q(1,\,-1,0) \\ \vec{v}(2,b,\,1) \end{cases}$$

$\overrightarrow{PQ} = (-1,2,0)$

a. $r_1 \perp r_2 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$; $(a,\,1,1)\cdot(2,b,\,1) = 0$; $2a+b+1 = 0$

r_1 y r_2 coplanarias $\Rightarrow \det\left\{\vec{u},\,\vec{v},\,\overrightarrow{PQ}\right\} = 0$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 ; \quad -2a+b+3 = 0$$

Con lo que resulta el sistema:

$$\begin{cases} 2a+b+1 = 0 \\ -2a+b+3 = 0 \end{cases}$$

que tiene por solución $\boxed{a = 1/2\,,\ b = -2}$ [7 p]

b. $$r_1:\begin{cases} P(2,\,-3,0) \\ \vec{u}(1/2,1,1) \end{cases} ; \quad r_2:\begin{cases} Q(1,\,-1,0) \\ \vec{v}(2,\,-2,1) \end{cases}$$

La ecuación del plano resulta (tomando el punto Q):

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1/2 & 2 \\ y+1 & 1 & -2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 ; \ \boxed{2x+y-2z-1 = 0} \quad [3 p]$$

10
118

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2} ; \quad r:\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -1+3\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{cases}$$

$\pi_1 : 3x+4y-1 = 0$

$\pi_2 : 4x-3z-1 = 0$

$d(r,\pi_1) = d(r,\pi_2)$

$$\frac{|3(1+2\lambda)+4(-1+3\lambda)-1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|4(1+2\lambda)-3(-2+2\lambda)-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

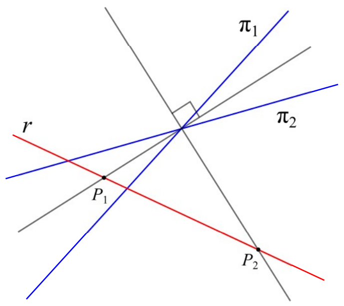
$$\frac{|18\lambda-2|}{5} = \frac{|2\lambda+9|}{5} ; \quad 18\lambda-2 = \pm(2\lambda+9)$$

$18\lambda-2 = 2\lambda+9$; $\lambda_1 = \frac{11}{16}$

$18\lambda-2 = -2\lambda-9$; $\lambda_2 = -\frac{7}{20}$

$$P_1:\begin{cases} x = 1+2\frac{11}{16} \\ y = -1+3\frac{11}{16} \\ z = -2+2\frac{11}{16} \end{cases} ; \ \boxed{P_1 = \left(\frac{38}{16},\,\frac{17}{16},\,-\frac{10}{16}\right)} \ ; \quad P_2:\begin{cases} x = 1+2\left(-\frac{7}{20}\right) \\ y = -1+3\left(-\frac{7}{20}\right) \\ z = -2+2\left(-\frac{7}{20}\right) \end{cases} ; \ \boxed{P_2 = \left(\frac{6}{20},\,-\frac{41}{20},\,-\frac{54}{20}\right)}$$

Resulta razonable que haya dos soluciones, pues el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de dos planos (plano mediador o mediatriz) está formado por dos planos perpendiculares entre sí y que se cortan en la misma recta intersección de los dos planos originales.



En la figura se muestra la proyección de los planos y la recta sobre un plano perpendicular a la recta intersección de los dos planos. En gris los dos planos mediatriz.

11
120

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y - az = b \end{cases}$$

$$M' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -a & b \end{array}\right)}_{M} \ ; \ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \ , \ \text{rango } M \geq 2$$

Para que los planos se corten en una recta el sistema debe ser compatible e indeterminado, con rango M = rango M' = 2.

$$|M| = 0 \ ; \ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -a \end{vmatrix} = 0 \ , \ a + 1 = 0 \ , \ \boxed{a = -1} \quad [3 \text{ pt}]$$

$$\text{rango } M' = 2 \text{ , por lo que } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & b \end{vmatrix} = 0 \ , \ 4 - b = 0 \ , \ \boxed{b = 4} \quad [3 \text{ pt}]$$

La ecuación de r se obtiene resolviendo el sistema. Haciendo $z = \lambda$:

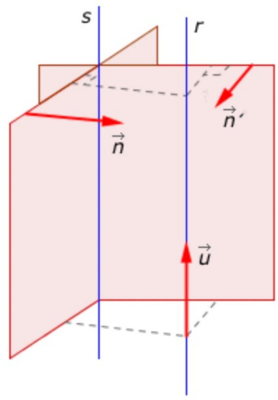
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3-\lambda \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{array}\right) ; \ x = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2-\lambda & -1 \end{vmatrix} = 1 \ ; \ y = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 2 & 3-\lambda \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -1 + \lambda$$

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \ r: \begin{cases} A = (1, -1, 0) \\ \vec{u} = (0,1,1) \end{cases}$$

$B = (2,1,3)$; $\overrightarrow{AB} = (1,2,3)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ \boxed{\pi: \ x + y - z = 0} \quad [4 \text{ pt}]$$

12
121



$$r: \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -7 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + ky + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

la recta s viene determinada por dos planos que tienen por vectores normales:

$\vec{n}(1,k,1)$ y $\vec{n}'(1,-1,-3)$

la recta r tiene por vector de dirección $\vec{u}(2,-1,1)$

$$r // s \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \ ; (2,-1,1) \cdot (1,k,1) = 0 \ ; \ 2 - k + 1 = 0 \ ; \ \boxed{k = 3} \\ \vec{u} \perp \vec{n}' \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n}' = 0 \ ; (2,-1,1) \cdot (1,-1,-3) = 0 \ ; \ 2 + 1 - 3 = 0 \ ; \ 0 = 0 \end{cases}$$

13
125

El sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 3x + 5y - 7z = 12 \\ 2x + y + mz = n \end{cases}$$

ha de ser compatible indeterminado.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 0 \ ; \ -m = 0 \ ; \ \boxed{m = 0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 12 \\ 2 & 1 & n \end{vmatrix} = 0 \ ; \ 1 - n = 0 \ ; \ \boxed{n = 1}$$

Así, los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada valen 2.

14
126

$x - 4y + 2z - 12 = 0$

$\sqrt{1701} \approx 41{,}24$

$\frac{12}{\sqrt{21}} \approx 2{,}619$

15
174

$a)\ P(2,1,2)\ \ Q(6,1,4)$

la distancia de P a Q es la diagonal del cuadrado:

$d(P,Q) = \sqrt{(6-2)^2 + (1-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20}$

$diagonal = \sqrt{2}\cdot lado \Rightarrow lado = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}$

$área = lado^2 = \boxed{10\ u^2}$ [5 p]

$b)$ es el plano mediatriz; tomando un punto $R(x,\ y,\ z)$ arbitrario del plano pedido:

$d(P,R) = d(Q,R)$

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2}$

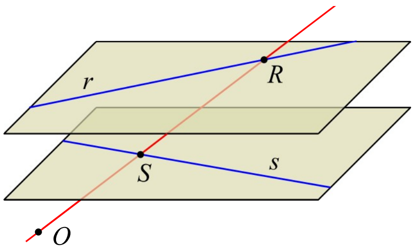
$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 8z + 16$

$8x + 4z - 44 = 0$; $\boxed{2x + z - 11 = 0}$ [5 p]

[también se podría haber obtenido con el vector normal $\overrightarrow{PQ}$ y el punto medio del segmento PQ]

16
189

$r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ y + z = -1 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + 5y + z + 2 = 0 \end{cases}$



pasando a paramétricas:

$r: \left(\frac{5}{2} + \lambda,\ 2\lambda,\ -1 - 2\lambda\right)$ $\quad s: (-1 - 17\mu,\ 7\mu,\ -\mu)$

los puntos R y S tienen vectores de posición proporcionales:

$\frac{\frac{5}{2}+\lambda}{-1-17\mu} = \frac{2\lambda}{7\mu} = \frac{-1-2\lambda}{-\mu}$

resolviendo: $\lambda = \frac{-7}{12}$; $\mu = \frac{-2}{11}$

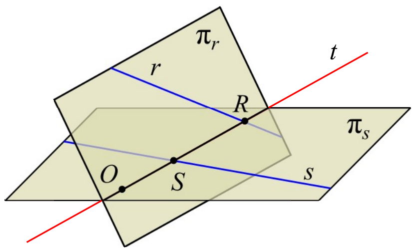
sustituyendo en las ecuaciones de r y s:

$\boxed{R\left(\frac{23}{12},\ \frac{-7}{6},\ \frac{1}{6}\right)}$; $\boxed{S\left(\frac{23}{11},\ \frac{-14}{11},\ \frac{2}{11}\right)}$

y la recta t tomando como vector dirección $(23,\ -14,\ 2)$

y como punto el propio origen $O(0,0,0)$: $\boxed{t: (23\gamma,\ -14\gamma,\ 2\gamma)}$

Otra forma de resolver el problema es obtener la ecuación de $t = \pi_r \cap \pi_s$ para lo que es preciso calcular previamente las ecuaciones π_r y π_s de los planos que contienen a O y a r y s respectivamente. (Ver figura de la derecha). Una vez obtenida t se calculan las coordenadas de los puntos R y S.



Hay una forma muy rápida de obtener las ecuaciones de π_r y π_s sin necesidad de pasar r y s a paramétricas. Se recurre al "haz de planos" que contienen a una recta dada:

"haz de planos" que contiene a r:

$k(2x - y - 5) + (y + z + 1) = 0$

de entre ellos, el que pasa por $O(0,0,0)$:

$k(-5) + 1 = 0;\ \ k = 1/5$

$\pi_r: \frac{1}{5}(2x - y - 5) + (y + z + 1) = 0;$ $\boxed{\pi_r: 2x + 4y + 5z = 0}$

"haz de planos" que contiene a s:

$k(x + 2y - 3z + 1) + (2x + 5y + z + 2) = 0$

de entre ellos, el que pasa por $O(0,0,0)$:

$k + 2 = 0;\ \ k = -2$

$\pi_r: -2(x + 2y - 3z + 1) + (2x + 5y + z + 2) = 0;$ $\boxed{\pi_r: y + 7z = 0}$

$t = \pi_r \cap \pi_s: \begin{cases} 2x + 4y + 5z = 0 \\ y + 7z = 0 \end{cases}$ $\quad \boxed{t: (23\gamma,\ -14\gamma,\ 2\gamma)}$

17
200

$\Pi_1 \equiv x+y+z=-3$; $\Pi_2 \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6-\mu \end{cases}$; $r \equiv \frac{x-3}{2} = y = \frac{z-3}{3}$

$\Pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$; $\boxed{\Pi_2 \equiv x+y+z+9=0}$

comparando los coeficientes de Π_1 y Π_2 : $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{3}{9}$

por tanto: $\boxed{\Pi_1 \,//\, \Pi_2}$ (y no coincidentes) [3 p]

paso de r a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=3+2t \\ y=t \\ z=3+3t \end{cases}$

$\Pi_1 \cap r$: $3+2t+t+3+3t=-3$; $t=-3/2$

$A = \Pi_1 \cap r = \left\{ \begin{array}{c} x=3+2(-3/2)=0 \\ y=-3/2 \\ z=3+3(-3/2)=-3/2 \end{array} \right\}$

$\boxed{A=(0,-3/2,-3/2)}$ [2 p]

$\Pi_2 \cap r$: $3+2t+t+3+3t+9=0$; $t=-5/2$

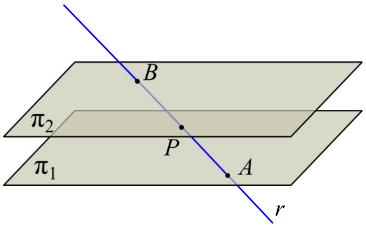
$B = \Pi_2 \cap r = \left\{ \begin{array}{c} x=3+2(-5/2)=-2 \\ y=-5/2 \\ z=3+3(-5/2)=-9/2 \end{array} \right\}$

$\boxed{B=(-2,-5/2,-9/2)}$ [2 p]

[en realidad no es necesario obtener estos dos puntos -aunque es muy conveniente para el siguiente apartado-, pues basta obtener el vector $\vec{u}(2,1,3)$ de dirección de r que no es perpendicular al vector $\vec{n}(1,1,1)$ característico de ambos planos]

P es el punto medio entre A y B:

$P = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{-5/2-3/2}{2}, \frac{-9/2-3/2}{2}\right) = \boxed{(-1,-2,-3)}$ [3 p]



18
201

$\Pi \equiv x-y+z=0$; $P(1,0,1)$

$a)$ ¿ P' simétrico de P respecto de Π ?

$\vec{n}=(1,-1,1)$ vector normal o característico de Π

recta t que pasa por P y P':

$\boxed{t:(1+\lambda,-\lambda,1+\lambda)}$ [2 p]

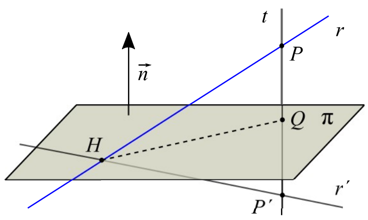
$Q = t \cap \Pi$: $1+\lambda+\lambda+1+\lambda=0$; $3\lambda=-2$; $\lambda=-2/3$

$Q=(1/3,2/3;1/3)$

$P'(x,y,z)$; Q es el punto medio entre P y P':

$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+0}{2}, \frac{z+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=-1/3 \\ y=4/3 \\ z=-1/3 \end{cases}$

$\boxed{P' = \left(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-1}{3}\right)}$ [3 p]



$b)$ ¿ r' simétrica de r respecto de Π ?

$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{3}$; $r \equiv (1+\mu, 3\mu, 1+3\mu)$

$H = r \cap \Pi$; $1+\mu-3\mu+1+3\mu=0$; $\mu=-2$

$\boxed{H=(-1,-6,-5)}$ [1 p]

$\overrightarrow{HP'} = \left(\frac{2}{3}, \frac{22}{3}, \frac{14}{3}\right)$; $\vec{u} = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}, \frac{22}{3}, \frac{14}{3}\right) = (1,11,7)$

$\boxed{r' \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y+6}{11} = \frac{z+5}{7}}$ [4 p]

19
214

$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ ax - z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + by = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$

En forma paramétrica:

$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = a\lambda \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x = 3 - b\mu \\ y = \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$

Punto y vector dirección:

$r \equiv \begin{cases} O\,(0,0,0) \\ \vec{u} = (1, 2, a) \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} A\,(3,0,3) \\ \vec{v} = (-b,\ 1,\ -1) \end{cases}$

$\overrightarrow{OA} = (3, 0, 3)$

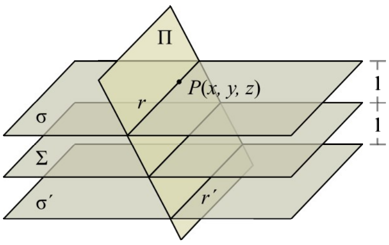
Para que se corten en una recta rango $\{\overrightarrow{OA}, \vec{u}, \vec{v}\} = 2$, y su determinante cero.

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & a \\ -b & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$; $3(2b - a - 1) = 0$; $2b - a - 1 = 0$

Además, para que sean perpendiculares $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$; $-b + 2 - a = 0$

$\begin{cases} a - 2b = -1 \\ a + b = 2 \end{cases}$ $\boxed{\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}}$

20
215



$\Pi \equiv x - 2y = 0$

$\Sigma \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0$

En primer lugar deben obtenerse las ecuaciones de los planos σ y σ':

$d(P, \Sigma) = 1$; $\dfrac{|2x-y+2z-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = 1$

$2x - y + 2z - 3 = \pm 3$

$\boxed{\sigma \equiv 2x - y + 2z = 0}$ [2 p]

$\boxed{\sigma' \equiv 2x - y + 2z - 6 = 0}$ [2 p]

Para calcular, a continuación, las rectas solución r y r':

$r = \sigma \cap \Pi : \boxed{\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}}$ [2 p] en forma continua: $\boxed{r: \frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}}$ [1 p]

$r' = \sigma' \cap \Pi : \boxed{\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases}}$ [2 p] en forma continua: $\boxed{r': \frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}}$ [1 p]

La interpretación gráfica no es necesaria, y el problema se puede abordar desde un punto de vista estrictamente analítico, tomando un punto arbitrario $P(x, y, z)$ del lugar geométrico buscado y exigiendo que se cumplan las condiciones del enunciado:

$\begin{cases} P \in \Pi \\ d(P, \Sigma) = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ \dfrac{|2x-y+2z-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y + 2z - 3 = \pm 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y + 2z - 3 \pm 3 = 0 \end{cases}$

$r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$ $r': \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$

21
336

$\forall a \neq 1$ se cortan en el punto $\left(\frac{23+4a-10b+ab}{13(a-1)}, \frac{4-a-4b+3ab}{13(a-1)}, \frac{b-3}{a-1}\right)$

$a = 1$, $b \neq 3$ son paralelos; no se cortan

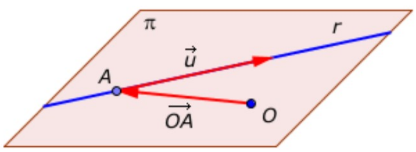
$a = 1$, $b = 3$ $r \subset \pi$ recta contenida en el plano

22
337

$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{3}$ $\begin{cases} A\,(2, -1, 3) \\ \vec{u} = (2, -2, 3) \end{cases}$

$O\,(0,0,0)$

$\pi: \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ y & -1 & -2 \\ z & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$; $\pi: \boxed{3x - 2z = 0}$



23
339

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \\ kx+10y+4z=11 \end{cases} \qquad M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{matrix}}_{M} \left| \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{matrix} \right.\right)$$

Los planos no son paralelos, pues no tienen coeficientes proporcionales.

Para que los planos tengan una recta común rango M = rango M' = 2

$|M| = -2k+14$

rango $M = 2 \Rightarrow |M| = 0 \Rightarrow \boxed{k=7}$ [7 p]

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-2 = 1 \neq 0$, y, por tanto, para $k=7$ rango $M = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{rango } M' = 2}$ [3 p]

24
340

$A = (2,0,1)$

$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$; $r: \begin{cases} B = (1,-3,0) \\ \vec{u} = (2,1,-1) \end{cases}$

$\overrightarrow{BA} = (1,3,1)$

Los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\vec{u}$ son vectores de dirección del plano buscado.

$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $\boxed{\pi: 4x-3y+5z-13=0}$

25
341

$\begin{cases} 3x+ay+z-1=0 \\ 2x+6y-2z-6=0 \end{cases}$

$x+y+z+1=0$

Para que la recta esté situada en el plano el sistema formado por las tres ecuaciones habrá de ser compatible indeterminado de rango 2.

$\begin{vmatrix} 3 & a & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $4(5-a) = 0$; $\boxed{a=5}$ [3 p]

Además $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ por lo que el rango de la matriz de coeficientes es 2 para $a = 5$.

El rango de la matriz ampliada también a de ser 2:

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6+6+2+2+2-18 = 0$

Así pues, para $a = 5$, tanto el rango de la matriz de coeficientes como el rango de la matriz ampliada valen 2, y la recta está incluida en el plano. [7 p]

26
342

$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{a}$ $\begin{cases} A = (1,2,4) \\ \vec{u} = (1,-1,a) \end{cases}$

$r': \frac{x-5}{-1} = \frac{y-2}{a} = \frac{z}{-1}$ $\begin{cases} B = (5,2,0) \\ \vec{v} = (-1,a,-1) \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} = (4,0,-4)$

para que r y r' sean coplanarias es necesario y suficiente que rango $\left\{\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right\} \leq 2$

para lo que det $\left\{\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right\} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1 \,;\, a_2 = -2}$

[se puede comprobar que para $a = 1$ las rectas son paralelas y no coincidentes, mientras que para $a = -2$ son dos rectas que se cortan en un punto]

27
343

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ ax + y + z = 1 \\ 2x + y + z = a \end{cases}$$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}}_{M} \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ a \end{matrix}\right.\right)$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2)$$

$\forall\, a \neq 1, a \neq 2$, rango $M = 3$ y los planos se cortan en un punto.

Para $a = 2$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}}_{M} \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right.\right)$$

Las filas/ecuaciones 3ª y 4ª resultan claramente incompatibles, y corresponden a dos planos paralelos.

Para $a = 1$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}}_{M} \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right.\right)$$

Las filas/ecuaciones 1ª y 2ª son corresponden al mismo plano, que se corta con el correspondiente a la 3ª fila/ecuación en una recta.

Por tanto, $\boxed{\text{para } a = 1 \text{ los tres planos se cortan en una recta}}$

El vector director de la recta intersección se obtiene fácilmente al múltiplicar vectorialmente los vectores normales de ambos planos:

$$\vec{u} = (1,1,1) \times (2,1,2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{(1, 0, -1)}$$

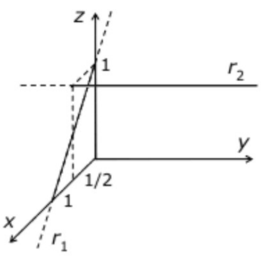
28
346

$\boxed{r_1 \perp r_2}$ $\forall k \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{para } k = \frac{1}{2} \text{ se cortan en } \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)}$

$\boxed{\text{para } k \neq \frac{1}{2} \text{ se cruzan}}$

$\boxed{d(r_1, r_2) = \frac{|-k+1/2|}{\sqrt{2}}}$



29
347

$\pi: 2x + 2y + z - 3 = 0$

$A(1,0,2)$, $B(2,1,-2)$

recta perpendicular a π por A:

$t: (1 + 2\lambda, 2\lambda, 2 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$C = t \cap \pi$

Sustituyendo las coordenadas paramétricas de t en π:

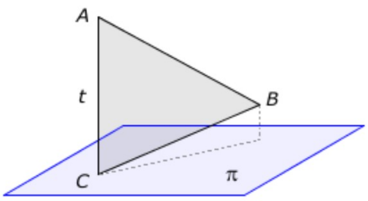
$2(1 + 2\lambda) + 2(2\lambda) + (2 + \lambda) - 3 = 0$; $9\lambda + 1 = 0$; $\lambda = -1/9$

$C = \left(1 + 2\left(-\frac{1}{9}\right), 2\left(-\frac{1}{9}\right), 2 + \left(-\frac{1}{9}\right)\right)$; $\boxed{C = \left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9}\right)}$

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -4)$; $\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{9}(2,2,1)$

área triángulo $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{18}\left|(1,1,-4) \times (2,2,1)\right| =$

$= \frac{1}{18}\left|(9, -9, 0)\right| = \frac{1}{18} 9\sqrt{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$



30
348

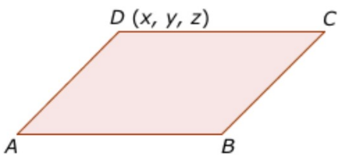
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$(x - 3, y - 1, z - 2) = (2,1,2)$

$(x, y, z) = (3,1,2) + (2,1,2) = \boxed{(5,2,4)}$ (5 p)

área $= \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right| =$

$$= \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{matrix}\right\| = |(5, -6, -2)| = \boxed{\sqrt{65}} \text{ (5 p)}$$

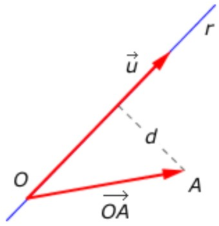


31
350

$A = (1, 2, 3)$; $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$a)$ distancia de A a r:

pasando r a paramétricas: $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$



obtenemos un punto y un vector dirección de r:

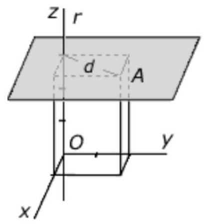
$O = (0, 0, 0)$; $\vec{u} = (0, 0, 1)$

$d = d(A, r) = \dfrac{|\vec{OA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \boxed{\sqrt{5}}$ [5 p]

$b)$ plano perpendicular a r por A:

$\vec{u} = (0, 0, 1)$ es un vector normal del plano; así pues:

$0(x-1) + 0(y-2) + 1(z-3) = 0$; $\boxed{z - 3 = 0}$ [5 p]



El problema se simplifica mucho si se advierte que la recta *r* es el eje *Z*. La distancia *d* se obtiene, así, mediante el teorema de Pitágoras, y el plano ha de ser *z* = 3.

32
1798

$a)$ $k = 14$ $P(-4, 5, 3)$

$b)$ $\pi: 11x - 5y + 7z + 48 = 0$

$c)$ $\alpha \approx 85^\circ\ 54'\ 14''$

$d)$ $d = \dfrac{|70 - 5k|}{\sqrt{195}}$

$e)$ $\beta \approx 51^\circ\ 58'\ 25''$

33
1801

$a)$ $85^\circ\ 39'\ 53''$ [2 p]

$b)$ $56^\circ\ 47'\ 21''$ [2 p]

$c)$ $\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5355$ u [2 p]

$d)$ $\dfrac{5}{\sqrt{339}} \approx 2{,}7156$ u [2 p]

$e)$ $\dfrac{1}{2}\sqrt{69} \approx 4{,}1533$ u^2 [2 p]

34
1803

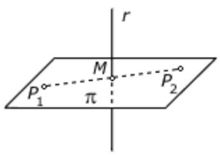
1) ecuación del plano π perpendicular a r y que contiene a P_2

$\vec{n} = (2, 1, -1) \times (1, 5, -1) = (4, 1, 9)$

$\pi: 4(x-3) + 1(y-1) + 9(z+2) = 0$; $\boxed{\pi: 4x + y + 9z + 5 = 0}$

2) punto M intersección de r y π

$M: \begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ x + 5y - z = 0 \\ 4x + y + 9z = -5 \end{cases}$ resolviendo $\boxed{M = \left(\frac{-8}{7}, \frac{3}{14}, \frac{-1}{14}\right)}$



3) $P_2 = (x, y, z)$

M es el punto medio entre P_1 y P_2

$\left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z-2}{2}\right) = \left(\frac{-8}{7}, \frac{3}{14}, \frac{-1}{14}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{37}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \\ z = \frac{13}{7} \end{cases}$

$\boxed{P_1 = \left(\frac{-37}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{13}{7}\right)}$

35
1804

$x - 8y + 5z - 3 = 0$

36 1809

$r_1:\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$; $r_2:\begin{cases} x=1/2 \\ z=k \end{cases}$

$r_1:\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$; $r_2:\begin{cases} x=1/2 \\ y=\mu \\ z=k \end{cases}$

$r_1:\begin{cases} A=(1,0,0) \\ \vec{u}=(-1,0,1) \end{cases}$; $r_2:\begin{cases} B=(1/2,0,k) \\ \vec{v}=(0,1,0) \end{cases}$

$\overrightarrow{AB}=(-1/2,0,k)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & k \end{vmatrix} = \frac{1}{2}-k$$

Por tanto, $\boxed{\text{para } k \neq \frac{1}{2} \text{ el sistema formado por los tres vectores tiene rango tres. Las rectas se cruzan}}$

En ningún caso son paralelas, pues rango$\{\vec{u},\ \vec{v}\}$ = rango$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ = 2.

$\boxed{\text{Para } k=\frac{1}{2} \text{ las rectas se cortan en un punto. Las dos rectas están en un mismo plano}}$

$$d(r_1,\ r_2)=\frac{\left|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & k \end{vmatrix} = \frac{1}{2}-k$$

$\vec{u}\times\vec{v}=(-1,0,1)\times(0,1,0)=(0,0,-1)$; $|\vec{u}\times\vec{v}|=1$

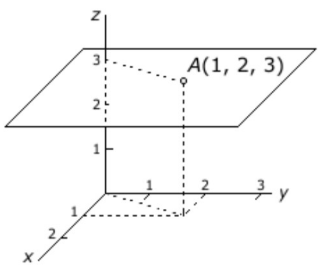
$$d(r_1,\ r_2)=\frac{\left|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{\left|\frac{1}{2}-k\right|}{1}=\boxed{\left|\frac{1}{2}-k\right|}$$

37 1814

La recta r es el eje Z.

$\boxed{d(A,r)=\sqrt{5}}$ [6 pt]

$\boxed{\pi: z-3=0}$ [4 pt]



38 1824

$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{2}$; $r:(1+2t,\ -1+3t,\ -2+2t)$, $(t\in\mathbb{R})$

$\pi_1: 3x+4y-1=0$, $\pi_2: 4x-3z-1=0$

$P=(1+2t,\ -1+3t,\ -2+2t)$ punto genérico de la recta r

$d(P,\ \pi_1)=d(P,\ \pi_2)$

$$\frac{|3(1+2t)+4(-1+3t)-1|}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}}=\frac{|4(1+2t)-3(-2+2t)-1|}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}}$$

$\frac{|18t-2|}{5}=\frac{|2t+9|}{5}$; $|18t-2|=|2t+9|$; $18t-2=\pm(2t+9)$

1er caso

$18t-2=2t+9$; $16t=11$; $t=\frac{11}{16}$

$P_1=\left(1+2\frac{11}{16},\ -1+3\frac{11}{16},\ -2+2\frac{11}{16}\right)=\boxed{\left(\frac{38}{16},\frac{17}{16},\ -\frac{10}{16}\right)}$ [6 p]

2º caso

$18t-2=-2t-9$; $20t=-7$; $t=-\frac{7}{20}$

$P_2=\left(1+2\left(-\frac{7}{20}\right),\ -1+3\left(-\frac{7}{20}\right),\ -2+2\left(-\frac{7}{20}\right)\right)=\boxed{\left(\frac{6}{20},\ -\frac{41}{20},\ -\frac{54}{20}\right)}$ [4 p]

39 1825

a. $P_0=(1,0,1)$; $P_1=(-1,1,1)$; $P_2=(0,-1,2)$

$Q=(0,0,1)$

$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P_1}&=(-2,1,0) \\ \overrightarrow{P_0P_2}&=(-1,-1,1) \end{aligned}\right\}$ son vectores de dirección del plano P

$\vec{n}=(-2,1,0)\times(-1,-1,1)=(1,2,3)$

$\vec{n}=(1,2,3)$ vector normal del plano P y vector de dirección de la recta r_3 buscada

$\boxed{r_3:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}}$

b. El vector $\overrightarrow{P_0P_1} = (-2,1,0)$ es vector de dirección de r_1 y de la recta r_4 buscada

$$\boxed{r_4: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}}$$

c. $r_2: \begin{cases} \overrightarrow{P_0P_2} = (-1,-1,1) \\ P_0 = (1,0,1) \end{cases}$; $r_4: \begin{cases} \overrightarrow{P_0P_1} = (-2,1,0) \\ Q = (0,0,1) \end{cases}$

$\overrightarrow{QP_0} = (1,0,0)$

$$d(r_2, r_4) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{QP_0}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}\right|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[\overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{QP_0}\right] = \left(\overrightarrow{P_0P_2} \times \overrightarrow{P_0P_1}\right) \cdot \overrightarrow{QP_0} = (1,2,3) \cdot (1,0,0) = 1 \\ \left|\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}\right| = |(1,2,3)| = \sqrt{14} \end{array}\right\} \boxed{d(r_2, r_4) = \frac{1}{\sqrt{14}}}$$

40
1827

a. $P_1 = (0,0,1)$, $P_2 = (2,0,0)$, $P_3 = (0,1,0)$ y $P_4 = (-1,-1,-1)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (2,0,-1)$; $\overrightarrow{P_1P_3} = (0,1,-1)$; $\overrightarrow{P_1P_4} = (-1,-1,-2)$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, vectores no coplanarios. $\boxed{\text{No hay ningún plano que pase por los cuatro puntos}}$ [3 p]

b. Plano π determinado por P_1, P_2 y P_3

$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$; $\pi: x + 2y + 2z - 2 = 0$ [1 p]

$\vec{n} = (1,2,2)$ es vector de dirección de la recta $\boxed{r: (-1+\lambda, -1+2\lambda, -1+2\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ [3 p]

c. Sustituyendo las coordenadas/ecuaciones de r en π:

$-1 + \lambda + 2(-1+2\lambda) + 2(-1+2\lambda) - 2 = 0$

$9\lambda - 7 = 0$; $\lambda = \frac{7}{9}$; $\boxed{Q = \left(\frac{-2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{5}{9}\right)}$ [3 p]

41
1830

a. $P_1 = (1,-1,0)$, $P_2 = (0,2,-1)$, $P_3 = (-1,1,2)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1,3,-1)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2,2,2) = 2(-1,1,1)$ son vectores de dirección del plano π_1

$\pi_1: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $4x + 2y + 2z - 2 = 0$; $\boxed{\pi_1: 2x + y + z - 1 = 0}$

b. $\vec{n}_1 = (2,1,1)$, (vector normal de π_1) y $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1,3,-1)$ son vectores de dirección del plano π_2

$\pi_2: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $4x - y - 6z - 5 = 0$; $\boxed{\pi_2: 4x - y - 7z - 5 = 0}$

c. Vale un plano cualquiera que no sea combinación lineal de π_1 y π_2, por ejemplo $\boxed{\pi_3: x = 0}$

Pero es preciso comprobarlo: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$; el sistema es compatible determinado.

d. Sumando las dos ecuaciones se obtiene un plano combinación lineal de π_1 y π_2 .

$\pi_4: 6x - 6z - 6 = 0$; $\boxed{\pi_4: x - z - 1 = 0}$

e. Basta con añadir una ecuación que resulte incompatible con π_1 o con π_2 . $\boxed{\pi_5: 2x + y + z = 0}$

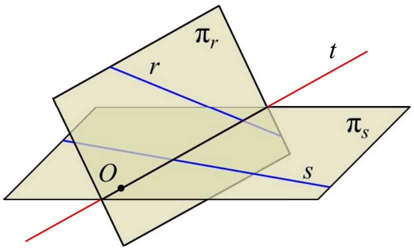
42
1831

a.

$$r\equiv\begin{cases}x-2y=1\\x-3y=1\end{cases}\quad;\quad s\equiv\left\{\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-2}=z\right\}$$

$$r\equiv\begin{cases}x=1\\y=0\\z=\lambda\end{cases}\;;\;s\equiv\begin{cases}x=-1+2\mu\\y=1-2\mu\\z=\mu\end{cases}$$

$$r\equiv\begin{cases}A=(1,0,0)\\\vec{u}=(0,0,1)\end{cases}\quad;\quad s\equiv\begin{cases}B=(-1,1,0)\\\vec{v}=(2,-2,1)\end{cases}$$



Plano π_r que contiene a r y a $O(0,0,0)$

$\vec{u}=(0,0,1)$ y $\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$ son vectores de dirección de π_r

$$\pi_r:\begin{vmatrix}x&y&z\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}=0\;;\;\pi_r:y=0$$

Plano π_s que contiene a s y a $O(0,0,0)$

$\vec{v}=(2,-2,1)$ y $\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$ son vectores de dirección de π_s

$$\pi_s:\begin{vmatrix}x&y&z\\2&-2&1\\1&0&0\end{vmatrix}=0\;;\;\pi_s:y+2z=0$$

$$t=\pi_r\cap\pi_s;\;\boxed{t:\begin{cases}y=0\\y+2z=0\end{cases}}\text{, o, en forma paramétrica, }\boxed{t:\begin{cases}x=\eta\\y=0\\z=0\end{cases}}\;;\;\eta\in\mathbb{R}$$

La recta buscada es el eje X.

b. $\vec{n}=(1,0,0)$ es vector de dirección de t y vector normal del plano buscado.

$\pi:\;1(x-0)+0(y-0)+0(z-0)=0\;;\;\boxed{\pi:x=0}$

43
1832

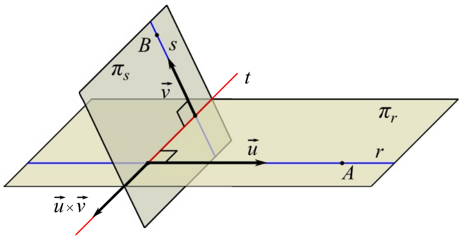
a.

$$r\equiv\begin{cases}2x+y=2\\z=-2\end{cases}\quad;\quad s\equiv\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{-1}$$

$$r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=2-2\lambda\\z=-2\end{cases}\;;\;s\equiv\begin{cases}x=3+\mu\\y=1-\mu\\z=-1-\mu\end{cases}$$

$$r\equiv\begin{cases}A=(0,2,-2)\\\vec{u}=(1,-2,0)\end{cases}\quad;\quad s\equiv\begin{cases}B=(3,1,-1)\\\vec{v}=(1,-1,-1)\end{cases}$$

$\vec{u}\times\vec{v}=(1,-2,0)\times(1,-1,-1)=(2,1,1)$



Plano π_r que determinado por r y $\vec{u}\times\vec{v}$

$\vec{u}=(1,-2,0)$ y $\vec{u}\times\vec{v}=(2,1,1)$ son vectores de dirección de π_r

$$\pi_r:\begin{vmatrix}x&y-2&z+2\\1&-2&0\\2&1&1\end{vmatrix}=0\;;\;\pi_r:\;2x+y-5z-12=0$$

Plano π_s que determinado por s y a $\vec{u}\times\vec{v}$

$\vec{v}=(1,-1,-1)$ y $\vec{u}\times\vec{v}=(2,1,1)$ son vectores de dirección de π_s

$$\pi_s:\begin{vmatrix}x-3&y-1&z+1\\1&-1&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=0\;;\;\pi_s:y-z-2=0$$

$$t=\pi_r\cap\pi_s;\;\boxed{t:\begin{cases}2x+y-5z-12=0\\y-z-2=0\end{cases}}\text{, o, en forma paramétrica, }\boxed{t:\begin{cases}x=5+4\eta\\y=2+2\eta\\z=2\eta\end{cases}}\;;\;\eta\in\mathbb{R}$$

b. $\overrightarrow{AB}=(3,-1,1)$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right]=\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=(2,1,1)\cdot(3,-1,1)=6\\\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=|(2,1,1)|=\sqrt{6}\end{array}\right\}d(r,s)=\frac{\left|\left[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\boxed{\sqrt{6}}$$

44
1833

a. $P=(0,1,0)\,;\;Q=(0,0,-1)\,;\;R=(1,0,1)\,;\;S=(1,1,1)$

$\overrightarrow{PQ}=(0,-1,-1)\,;\;\overrightarrow{PR}=(1,-1,1)\,;\;\overrightarrow{PS}=(1,0,1)$

$$\begin{vmatrix}0&-1&-1\\1&-1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=-1\neq0\Rightarrow\text{rango}\left\{\overrightarrow{PQ},\,\overrightarrow{PR},\,\overrightarrow{PS}\right\}=3\,;\;\boxed{\text{los cuatro puntos NO son coplanarios}}$$

b. El plano π está determinado por $P=(0,1,0)$, $\overrightarrow{PQ}=(0,-1,-1)$ y $\overrightarrow{PR}=(1,-1,1)$.

$$\pi:\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;\ \boxed{\pi: 2x+y-z-1=0}$$

La recta s está determinada por el punto $S=(1,1,1)$ y por el vector normal de π, $\vec{n}=(2,1,-1)$.

$$\boxed{s:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}}$$

c. $d(S,\pi)=\dfrac{|2\cdot 1+1-1-1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}}$

45
1835

a. $P=(2,\ -10,\ 6)$, $Q=(-2,\ 6,\ -2)$

Punto medio $M=\left(\frac{2-2}{2},\ \frac{-10+6}{2},\ \frac{6-2}{2}\right)$; $M=(0,\ -2,\ 2)$

$\overrightarrow{PQ}=(-4,16,\ -8)=\ -4(1,\ -4,\ 2)$

El plano, π, perpendicular por el punto medio (plano "mediador") pasa por el punto M y tiene por vector normal $(1,\ -4,\ 2)$ [también $(-4,\ 16,\ -8)$]

$\pi:\ 1(x-0)-4(y-(-2))+2(z-2)=0$; $\boxed{\pi:\ x-4y+2z-12=0}$

b. Puntos de corte del plano con los ejes $A(12,0,0)$, $B(0,\ -3,0)$ y $C(0,0,6)$

$\overrightarrow{AB}=(-12,\ -3,0)$, $\overrightarrow{AC}(-12,0,6)$

Área triángulo $=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -12 & -3 & 0 \\ -12 & 0 & 6 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|(-18,72,\ -36)|=9|(-1,4,\ -2)|=\boxed{9\sqrt{21}}$

c. $O(0,0,0)$

$d(O,\ \pi)=\dfrac{|0-4\times 0+2\times 0-12|}{\sqrt{21}}=\boxed{\dfrac{12}{\sqrt{21}}}$

46
1837

$A=(1,0,1)$; $B=(1,1,1)$; $C=(1,6,k)$

$a)$ $\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$; $\overrightarrow{AC}=(0,6,k-1)$

para que los puntos estén alineados: rango$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & k-1 \end{pmatrix}=1$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & k-1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{k=1}$ [3 p]

$b)$ área $\overset{\triangle}{ABC}=2$

área $\overset{\triangle}{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}|(k-1,0,0)|$

$\dfrac{|k-1|}{2}=2$; $k-1=\ \pm 4\Rightarrow\boxed{\begin{cases} k=5 \\ k=\ -3 \end{cases}}$ [3 p]

$c)$ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$ vector dirección de la recta r que pasa por A y B

$d(C,r)=\dfrac{\left|\vec{u}\times\overrightarrow{AC}\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{|k-1|}{1}=\boxed{|k-1|}$ [4 p]

47
1838

$r_1\equiv\frac{x}{2}=y+6=\frac{z-1}{3}$; $r_2\equiv\frac{x+4}{6}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-2}{2}$

$a)$ extrayendo puntos y vectores dirección:

$r_1:\begin{cases} A=(0,\ -6,1) \\ \vec{u}=(2,1,3) \end{cases}$; $r_2:\begin{cases} B=(-4,\ -1,2) \\ \vec{v}=(3,\ -2,1) \end{cases}$

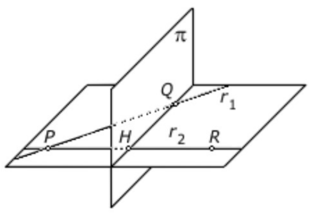
$\overrightarrow{AB}=(-4,5,1)$

se estudia el rango de $\left\{\vec{u},\ \vec{v},\ \overrightarrow{AB}\right\}$: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=\ -7\neq 0$

así pues, rango $\left\{\vec{u},\ \vec{v},\ \overrightarrow{AB}\right\}=$ rango $\left\{\vec{u},\ \vec{v}\right\}=2$

por lo que $\boxed{r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cortan en un punto}}$ [2 p]



$b)$ ecuaciones paramétricas:

$r_1:\begin{cases} x=2t \\ y=\ -6+t \\ z=1+3t \end{cases}$; $r_2:\begin{cases} x=\ -4+3s \\ y=\ -1-2s \\ z=2+s \end{cases}$

$\begin{cases} 2t=\ -4+3s \\ -6+t=\ -1-2s \\ 1+3t=2+s \end{cases}$

resolviendo y sustituyendo: $\boxed{P=(2,\ -5,4)}$ [2 p]

[El desarrollo del apartado $a)$ es innecesario;
es suficiente con encontrar P y mostrar que es único]

$c)\ R = (-4, -1, 2) = B$

punto medio de $\overline{PR}: H = (-1, -3, 3)$

plano mediatriz de $\overline{PR}: 3(x+1) - 2(y+3) + z - 3 = 0$

$\boxed{\pi: 3x - 2y + z - 6 = 0}$ [2 p]

$$Q = \pi \cap r_1 \left\{\begin{array}{l} 3x - 2y + z - 6 = 0 \\ x = 2t \\ y = -6 + t \\ z = 1 + 3t \end{array}\right\}$$

$3(2t) - 2(-6+t) + (1+3t) - 6 = 0\ ;\ t = -1$

$\boxed{Q = (-2, -7, -2)}$ [4 p]

Queda así demostrado que el triángulo es isósceles.

Si se calcula ahora el ángulo α que forman las rectas o sus vectores de dirección:

$$\alpha = \text{arccos}\ \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|} = \text{arccos}\ \frac{|(2,1,3)\cdot(3,-2,1)|}{|(2,1,3)|\ |(3,-2,1)|} = \text{arccos}\ \frac{1}{2} = 60\ ^{\text{o}}$$

Con lo que el triángulo es, efectivamente, equilátero.

48
2149

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4} \left\{\begin{array}{l} \vec{u} = (2, -5, 4) \\ A = (1, -5, -3) \end{array}\right.$$

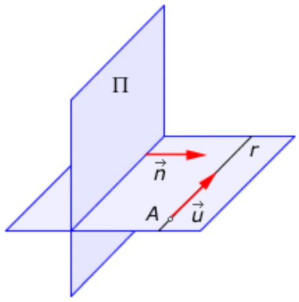
$\Pi: 2x + 4y + 4z = 5\ ;\ \vec{n} = (1, 2, 2)$

$a)\ \vec{n} \cdot \vec{u} = (1,2,2)\cdot(2,-5,4) = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow \boxed{r // \Pi}$ [2 p]

$b)\ d(r, \Pi) = d(A, \Pi) = \frac{|2\cdot 1 + 4\cdot(-5) + 4\cdot(-3) - 5|}{\sqrt{36}} = \boxed{\frac{35}{6}}$ [4 p]

$$c)\ \Pi' : \left\{\begin{array}{l} A = (1, -5, -3) \\ \vec{n} = (1, 2, 2) \\ \vec{u} = (2, -5, 4) \end{array}\right.\ ;\ \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z+3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\boxed{\Pi' :\ 2x - z - 5 = 0}$ [4 p]



49
2150

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x + 2y = 7 \\ y + 2z = 4 \end{array}\right.\ r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 7 - 2t \\ y = t \\ z = 2 - \frac{1}{2}t \end{array}\right.\ ;\ \left\{\begin{array}{l} \vec{u} = (4, -2, 1) \\ P' = (7, 0, 2) \end{array}\right.$$

$P = (1, 2, 3)$

$a)\ \Pi: 4(x-1) - 2(y-2) + 1(z-3) = 0$

$$\boxed{\Pi: 4x - 2y + z - 3 = 0}\ ;\ \boxed{\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = s \\ z = 3 - 4t + 2s \end{array}\right.}\ t, s \in \mathbb{R}\quad [4\ p]$$

$$b)\ s \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 + 2\alpha \end{array}\right.\ ;\ \vec{v} = (0, 1, 2)$$

sustituyendo las paramétricas de s en la general de Π :

$4\cdot 1 - 2(2+\alpha) + (3 + 2\alpha) - 3 = 0\ ;\ 0 = 0 \Rightarrow \boxed{s \subset \Pi}$ [3 p]

$c)\ \Pi'$: plano perpendicular a s que contiene a r (y a P')

$0\cdot(x-7) + 1\cdot(y-0) + 2\cdot(z-2)\ ;\ \boxed{\Pi': y + 2z - 4 = 0}$

$Q = s \cap \Pi'\ ;\ \boxed{Q = \left(1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)}$ [3 p]