Soluciones a los ejercicios de vectores

1
1817

$\vec{v} = (1,2,4)\ ,\ \vec{w} = (3,5,-1)$

El producto vectorial es perpendicular a ambos. Multiplicando por el inverso del módulo del producto se obtiene un vector unitario. Multiplicando, por último, por 2, se tendrá un vector como el pedido.

$\vec{v} \times \vec{w} = (1,2,4) \times (3,5,-1) = (-22, 13, -1)$

$|\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{(-22)^2 + 13^2 + (-1)^2} = \sqrt{654}$

$\frac{2}{\sqrt{654}}(-22, 13, -1) = \boxed{\left(\frac{-44}{\sqrt{654}}, \frac{26}{\sqrt{654}}, \frac{-2}{\sqrt{654}}\right)}$

El vector opuesto también cumpliría las condiciones exigidas.

2
2400

$\vec{u}(-1, 5, 6-k)\ ,\ \vec{v}(1, 2, 3)\ ,\vec{w}(3, -1, k)$

$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 6-k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ los tres vectores son coplanarios para cualquier valor de k.

3
2627

a. FALSO

Para los unitarios $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ de la base ortonormal: $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\imath} \cdot \vec{k} = 0$ y $\vec{\jmath} \neq \vec{k}$

b. CIERTO

$|\vec{v} \cdot \vec{w}| = \left||\vec{v}||\vec{w}|\cos(\vec{v}, \vec{w})\right| \leq 1 \times 2 \times 1 = 2$ y nunca puede ser igual a 3.

c. CIERTO

Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forman un sistema linealmente independiente es posible formar con ellos una base del espacio vectorial tridimensional, y los otros vectores se pueden expresar mediante coordenadas en la forma:

$\vec{u} + \vec{v} = (1, 1, 0)$

$\vec{u} - \vec{v} = (1, -1, 0)$

$\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = (1, -1, 1)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}\}$ es linealmente independiente.

4
2715

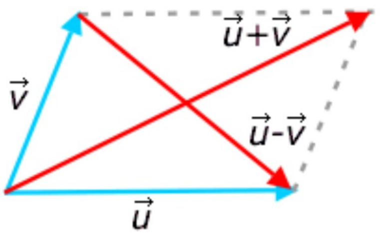
a) $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

Para que dos vectores sean ortogonales su producto escalar ha de ser cero.

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \cancel{\vec{u} \cdot \vec{v}} + \cancel{\vec{v} \cdot \vec{u}} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0 \Rightarrow \boxed{(\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v})}$ [3 p]

b) $\vec{x} = (-1, 2, 3)\ ;\ \vec{y} = (2, 3, -1)$

Las coordenadas de los vectores no son proporcionales, por lo que el sistema formado por ambos vectores es linealmente independiente. Lo es también, por tanto, el sistema formado por su suma y su resta. [4 p]



c) $A(1,5,2)$, $B(0,0,0)$, $C(-3,-1,4)$

$\overrightarrow{BA} = (1,5,2)$, $\overrightarrow{BC} = (-3,-1,4)$

Son vectores ortogonales por lo que el área es el producto de los módulos.

[O, también, a través del módulo del producto vectorial]

área $= \sqrt{30}\,\sqrt{26} = \boxed{\sqrt{780}}$ [3 p]

5
2818

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -1 \\ -2 & k & 0 \end{vmatrix} = k^2 + k + 4$$

$k^2 + k + 4 = 0$ no tiene solución real, por lo que el determinante es siempre distinto de cero, y los tres vectores forman un sistema linealmente independiente y, por lo tanto, una base.

$\boxed{\text{Para cualquier valor de } k \text{ el sistema es una base}}$

6
2889

a. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = 17$

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \cancel{\vec{u}\cdot\vec{v}} + \cancel{\vec{v}\cdot\vec{u}} - \vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 17$

$|\vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 - 17} = \sqrt{9^2 - 17} = \sqrt{64} = \boxed{8}$

b.1. $\vec{a} = (2,-1,4)$; $\vec{b} = (0,3,m)$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$; $(2,-1,4)\cdot(0,3,m) = 0$; $-3 + 4m = 0$; $\boxed{m = \frac{3}{4}}$

b.2. Para $m = 0$, $\vec{b} = (0,3,0)$

área del paralelogramo $= \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |(2,-1,4)\times(0,3,0)| = |(-12,0,6)| =$

$= \sqrt{(-12)^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{180} = \boxed{6\sqrt{5}\,\text{u}^2}$

7
2923

$\vec{a}(2,6,1)$; $\vec{b}(5,1,0)$

$a)$ vector unitario en la misma dirección que $\vec{b}$:

se obtiene fácilmente dividiendo el vector por su módulo: $\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{26}}(5,1,0) = \boxed{\left(\frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}, 0\right)}$ [5 p]

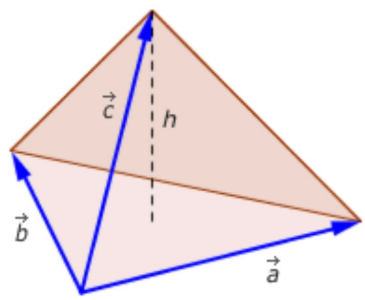
$b)$ proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es: $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$ que, multiplicado por el unitario obtenido en el apartado anterior, proporciona el vector buscado:

$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b} = \frac{(2,6,1)\cdot(5,1,0)}{26}(5,1,0) = \frac{16}{26}(5,1,0) = \frac{8}{13}(5,1,0) = \boxed{\left(\frac{40}{13}, \frac{8}{13}, 0\right)}$ [5 p]

8
2929

a. Una pirámide de base triangular es un tetraedro cuyo volumen se puede obtener mediante el producto mixto:

volumen de la pirámide $= \frac{1}{6}\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}\right| = \boxed{\frac{23}{6}\,\text{u}^3}$



b.

área de la base $= \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(2,6,-7)| = \frac{\sqrt{89}}{2}$

volumen $= \frac{1}{3}$ área base $\times$ altura

altura $= \frac{3\text{ volumen}}{\text{área base}} = \frac{3\,\frac{23}{6}}{\frac{\sqrt{89}}{2}} = \boxed{\frac{23}{\sqrt{89}}\,\text{u}}$

9
2931

$\vec{w} = (-2, 4, -1)$

$\vec{v} = (1, -2, 3)$

$\vec{u} = \lambda \vec{v} = (\lambda, -2\lambda, 3\lambda)$

el área es el módulo del producto vectorial: $\left|\vec{u} \times \vec{w}\right| = 25$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \lambda & -2\lambda & 3\lambda \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \lambda\left(-10\,\vec{\imath} - 5\,\vec{\jmath}\right) = \lambda(-10, 5, 0)$$

$\left|\vec{u} \times \vec{w}\right| = |\lambda|\sqrt{125} = |\lambda| 5\sqrt{5} = 25$; $|\lambda| = \dfrac{25}{5\sqrt{5}} = \sqrt{5}$; $\lambda = \pm\sqrt{5}$

dos soluciones: $\boxed{\vec{u}_1 = \sqrt{5}\,\vec{v} = \left(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5}\right) \ ; \ \vec{u}_2 = -\sqrt{5}\,\vec{v} = \left(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5}\right)}$

10
2967

$A(2, -3, 1)$; $B(5, 0, 2)$; $C(14, m, 5)$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3, 3, 1) \\ \overrightarrow{BC} = (9, m, 3) \end{array}\right\} \frac{3}{9} = \frac{3}{m} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{m = 9}$$

11
4457

a. $\vec{u} \perp \vec{v}$; $\left|\vec{u}\right| = \left|\vec{v}\right| = 1$

$\vec{u} + a\,\vec{v}$ y $\vec{u} - a\,\vec{v}$ forman un ángulo de 60º, por lo que

$\cos 60º = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\left(\vec{u} + a\,\vec{v}\right)\left(\vec{u} - a\,\vec{v}\right)}{\left|\vec{u} + a\,\vec{v}\right| \left|\vec{u} - a\,\vec{v}\right|}$ [1 p]

$\left(\vec{u} + a\,\vec{v}\right)\left(\vec{u} - a\,\vec{v}\right) = \vec{u} \cdot \vec{u} - a\,\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{0} + a\,\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{u}}_{0} - a^2\,\vec{v} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right|^2 - a^2\left|\vec{v}\right| = 1 - a^2$ [1 p]

$$\left.\begin{array}{l} \left|\vec{u} + a\,\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\vec{u} + a\,\vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + a\,\vec{v}\right)} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} + a\,\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{0} + a\,\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{u}}_{0} + a^2\,\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\left|\vec{u}\right|^2 + a^2\left|\vec{v}\right|} = \sqrt{1 + a^2} \\ \left|\vec{u} - a\,\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\vec{u} - a\,\vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} - a\,\vec{v}\right)} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} - a\,\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{0} - a\,\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{u}}_{0} + a^2\,\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\left|\vec{u}\right|^2 + a^2\left|\vec{v}\right|} = \sqrt{1 + a^2} \end{array}\right\} \text{[1 p]}$$

$\dfrac{1 - a^2}{\sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 + a^2}} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1 - a^2}{1 + a^2} = \dfrac{1}{2}$; $3a^2 = 1$; $\boxed{a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ [1 p]

b. $\vec{z} = \dfrac{1}{\left|\vec{x} \times \vec{y}\right|}\,\vec{x} \times \vec{y}$ [1 p]

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 1) \ ; \ \left|\vec{x} \times \vec{y}\right| = \sqrt{3}$$

$\boxed{\vec{z} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}$ [2 p]

[También el opuesto cumple con las condiciones del enunciado]

c. "Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son tres vectores no nulos que cumplen $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, entonces $\vec{b} = \vec{c}$"

Es FALSO.

Basta con tomar tres vectores colineales $\vec{a}$, $2\vec{a}$ y $3\vec{a}$:

$\vec{a} \times \left(2\vec{a}\right) = \vec{a} \times \left(3\vec{a}\right) = 0$ y, puesto que $\vec{a}$ es no nulo $2\vec{a} \neq 3\vec{a}$. [3 p]

En general, aplicando la propiedad distributiva a aquella igualdad resulta:

$\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$; $\vec{a} \times \left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{0}$

Con lo que $\vec{a}$ y $\vec{b} - \vec{c}$ han de ser colineales (múltiplos, combinación lineal el uno del otro, ...)

12
9344

a. $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (1,-2,-1)$ y $\vec{w} = (2,\alpha,\beta)$

$\vec{u} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (1,2,3) \cdot (2,\alpha,\beta) = 2 + 2\alpha + 3\beta = 0$; $2\alpha + 3\beta = -2$

$\vec{v} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = (1,-2,-1) \cdot (2,\alpha,\beta) = 2 - 2\alpha - \beta = 0$; $2\alpha + \beta = 2$

$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = -2 \\ 2\alpha + \beta = 2 \end{cases}$; $\boxed{\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -2 \end{cases}}$

También: $\vec{u} \times \vec{v} = (1,2,3) \times (1,-2,-1) = (4,4,-4) = 4(1,1,-1)$

Para que $\vec{w}$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, ha de ser colineal al producto vectorial:

$\frac{2}{1} = \frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -2 \end{cases}$

b. $\vec{w}$ y $\vec{v}$ misma dirección $\Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{\alpha}{-2} = \frac{\beta}{-1}$; $\boxed{\begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = -2 \end{cases}}$

c. $\vec{w} = (2,8,\beta)$ combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v} \Rightarrow \det\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 8 & \beta \end{vmatrix} = 40 - 4\beta = 0$; $\boxed{\beta = 10}$