Boletín de Geometría (III): Problemas Métricos

1

a. Se consideran el plano $\pi\colon 3x+2y-z=0$ y la recta $r\colon \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{3}$. Calcular el punto de corte de r con π y obtener la ecuación implícita del plano π' que es perpendicular a π y contiene a r.

b. Estudiar la posición relativa de los planos

$$\pi_1 : 2x-5y-4z-9=0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : x=0$$

y calcular el ángulo que forman.

2

a. Estudiar la posición relativa de los planos

$$\pi_1 : x+my+z+2=0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : mx+y+z+m=0$$

en función de m.

b. Calcular el valor que deben tomar k y m para que los puntos

$$A(0,k,1) \quad , \quad B(-1,2,1) \quad , \quad C(8,1,m)$$

estén alineados.

c. Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(-1,2,1)$, y $Q(8,1,1)$, y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto $R(1,1,1)$.

3

a. Estudie la posición relativa de los planos

$$\pi_1 : mx-y+2=0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : 2x+3y=0$$

en función del parámetro m.

b. Obtenga la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos

$$A(0,0,0) \quad , \quad B(1,0,1) \quad \text{y} \quad C(0,1,0)$$

c. Calcule el punto simétrico del punto $P(1,2,3)$ con respecto al plano $\pi\colon -x+z=0$.

4

a. Calcular el ángulo que forman los vectores

$$\vec{u}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) \quad \text{y} \quad \vec{v}=\left(-\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$$

b. Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1,-3,0)$ y es perpendicular a la recta:

$$\begin{cases} x-y+2z=1 \\ y-z=0 \end{cases}$$

c. Calcular la distancia del punto $Q(1,1,1)$ al plano $\pi\colon -x+y+z+4=0$, y el punto simétrico de Q respecto a π.

5

Determinar un plano que, pasando por el origen de coordenadas, sea paralelo a la recta de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \end{cases}$$

y también paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$.

6

Se consideran las rectas

$$r\colon \begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s\colon x=y+1=\frac{z-2}{2}$$

a. Obtener la ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

b. Obtener la recta que pasa por $P=(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta r.

c. Calcular el valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x-2y+az=b$.

7 Se considera la recta r

$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$$

y el punto $P(1,2,5)$ exterior a la misma. Hallar la ecuación del plano que contiene a r y a P.

8 Se consideran la recta

$$r \equiv \begin{cases} 4x-3y+4z=1 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$$

y el plano $x-y+Az=0$.

a. ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a r?

b. Encontrar el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(0,0,0)$.

9 Calcule la ecuación continua de la recta t sabiendo que pasa por el punto $P\equiv(1,-2,-1)$ y que corta a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x+y-z-1=0 \\ 3y-2z+3=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s\equiv \frac{x-3}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

10 Dadas las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y-2z-1=0 \\ y+z+1=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s\equiv \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$$

calcule la ecuación de un plano π paralelo a la recta r y que diste 3 unidades de s.

11 Los puntos $A=(0,-1,1)$ y $B=(1,1,1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice C está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+z=1$.

a. Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano π.

b. Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

12 Considere la recta $r: \frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ y el plano $\pi: x-2y-z=-1$.

a. Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

b. En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que la recta no corte al plano, calcule la distancia entre ambos.

13 Considere las siguientes rectas:

$$r: \frac{x-5}{1}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+1}{1} \quad ; \quad s: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

a. Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b. En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

14 Dados el plano, $\pi\equiv 2x+3y-z=4$, y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s\equiv (x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,0,1)\ ,\ \text{con}\ \lambda\in\mathbb{R}$$

se pide:

a. Calcular el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de π.

b. Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

c. Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

15

Sean los planos $\pi_1 : x + y + z = 0$ y π_2 . Su intersección es la recta $r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$. Calcule:

a. La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1,1,1) \in \pi_2$.

b. La ecuación de un plano π'_1 paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta r.