Bloque de Geometría(II): Problemas métricos

1 Sean $P_1 = (1, 2, 1)$, $P_2 = (2, 3, 1)$, $P_3 = (-1, 4, 3)$ y $P_4 = (0, 5, 3)$.

a. Demostrar que los cuatro puntos están en el mismo plano. Dar la ecuación de ese plano.

b. Demostrar que el polígono que tiene como vértices esos cuatro puntos es un rectángulo.

c. Calcular el área de ese rectángulo.

2 Dadas las rectas

$$r_1 \equiv x = y = \frac{z-1}{2}$$

$$r_2 \equiv (x, y, z) = (2, -1, 4) + t(2, -1, 1)$$

a. Estudiar la posición relativa de ambas rectas en el espacio.

b. Estudiar si alguna de las dos pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

c. Hallar la ecuación de un plano que contenga a r_1 y no corte a r_2.

3 Determinar el punto de la recta

$$r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$$

que equidista de los planos:

$$P_1 \equiv 2x - 3y - 6z + 3 = 0$$

$$P_2 \equiv 4x + 3y + 3 = 0$$

4 Estudie la posición relativa de los planos:

$$2x + 3y - 5z + 1 = 0$$

$$x + 2y - z + 12 = 0$$

$$4x + 7y - 7z + 5 = 0$$

5 Sea A el punto de coordenadas $(1, 0, -1)$, y B el punto de coordenadas $(t, 3, 0)$. Determinar "t" para que la recta AB sea paralela al plano $2x - y + 4z - 1 = 0$.

6 Dadas las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-k}{3} = \frac{z}{-1}$$

$$r_2 \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$$

Determine el valor de "k" para que ambas rectas se corten en un punto y, en ese caso, halle la ecuación del plano que determinan.

7 Dados dos puntos $A(1, 0)$ y $B(0, 2)$ del plano, calcular las coordenadas de un punto C tal que la recta $x = y$ pase por C, y el área del triángulo ABC sea 2.

8 Discutir la posición de los tres planos de ecuaciones:

$$3x - ay + 2z - (a-1) = 0$$

$$2x - 5y + 3z - 1 = 0$$

$$x + 3y - (a-1)z = 0$$

según los distintos valores de "a".

9 Dadas las rectas del espacio

$$r_1:\begin{cases}x = az + 2\\ y = z - 3\end{cases}\quad r_2:\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{b} = z$$

se pide:

1. Determinar "a" y "b" para que sean ortogonales y coplanarias.
2. Para los valores de "a" y "b" determinados, hallar la ecuación del plano que contiene a dichas rectas.

10 Determinar un punto de la recta:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$$

que equidista de los planos $3x + 4y - 1 = 0$, y, $4x - 3z - 1 = 0$. ¿Es única la solución?

11 Determinar a y b para que los planos de ecuaciones

$$2x - y + z = 3$$
$$x - y + z = 2$$
$$3x - y - az = b$$

se corten en una recta r . Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $(2, 1, 3)$.

12 Calcule "k" para que sean paralelas las rectas:

$$\begin{cases}x = 5 + 2\lambda\\ y = 2 - \lambda\\ z = -7 + \lambda\end{cases}\quad \begin{cases}x + ky + z + 2 = 0\\ x - y - 3z - 2 = 0\end{cases}$$

13 Sean la recta

$$r:\begin{cases}x + 2y - 3z = 5\\ 3x + 5y - 7z = 12\end{cases}$$

y el plano $\pi: 2x + y + mz = n$.

Determinar m y n para que la recta r esté contenida en el plano π.

14 Sean $P = (2, -10, 6)$ y $Q = (-2, 6, -2)$.

a. Hallar la ecuación del plano π que pasa por el punto medio de P y Q , y es perpendicular al segmento que los une.
b. Hallar el área del triángulo determinado por los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.
c. Hallar la distancia del origen de coordenadas al plano π .

15 Si los puntos $P(2, 1, 2)$ y $Q(6, 1, 4)$ son vértices opuestos de un cuadrado, se pide:

a. Calcular el área del cuadrado.
b. Obtener la ecuación general del plano que pasa por el centro del cuadrado y es perpendicular a la diagonal que pasa por los vértices P y Q.

16 Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases}2x - y = 5\\ y + z = -1\end{cases}\quad y\quad s \equiv \begin{cases}x + 2y - 3z + 1 = 0\\ 2x + 5y + z + 2 = 0\end{cases}$$

hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen de coordenadas y se apoya en ambas.

Hallar los puntos de apoyo de t en r y en s.

17 Estudiar las posiciones relativas de los planos

$$\Pi_1 \equiv x+y+z=-3 \quad y \quad \Pi_2 \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6-\mu \end{cases}$$

así como la de la recta

$$r \equiv \frac{x-3}{2}=y=\frac{z-3}{3}$$

en relación a ellos.

Hallar un punto P de r que esté a la misma distancia de Π_1 y de Π_2.

18 Dado el plano $\pi \equiv x-y+z=0$

a. Halle el punto simétrico del punto $P(1, 0, 1)$ respecto de π.

b. Halle la recta simétrica de la recta

$$r \equiv x-1=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{3}$$

respecto a π.

19 Hallar los valores de a y b para que las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x-y=0 \\ ax-z=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x+by=3 \\ y+z=3 \end{cases}$$

se corten y sean perpendiculares.

20 Halle los puntos del plano $\Pi \equiv x-2y=0$

que están a distancia 1 del plano $\Sigma \equiv 2x-y+2z-3=0$

21 Estudie, según los valores de "a" y de "b" la posición relativa del plano

$$\Pi: 2x-5y+az=-2$$

y la recta

$$r: \begin{cases} 3x-y+2z=1 \\ x+4y+z=b \end{cases}$$

22 Dada la recta de ecuaciones:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{3}$$

Determine la ecuación general (o implícita) del plano que la contiene y pasa por el origen de coordenadas.

23 Calcular el valor de "k" para que los planos:

$$x+y+z=2$$
$$2x+3y+z=3$$
$$kx+10y+4z=11$$

tengan una recta común.

24 Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A=(2,0,1)$ y contiene a la recta de ecuación:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}$$

25 Determinar condiciones en el parámetro "a" para que la recta definida por las ecuaciones

$$3x+ay+z-1=0$$
$$2x+6y-2z-6=0$$

esté situada en el plano $x + y + z + 1 = 0$.

26 Dadas las rectas

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{a}$$

$$r': \frac{x-5}{-1} = \frac{y-2}{a} = \frac{z}{-1}$$

Determinar los posibles valores del parámetro "a" que hacen que r y r' sean coplanarias.

27 Hallar los valores del parámetro "a" para que los tres planos

$$x + y + az = 1$$

$$ax + y + z = 1$$

$$2x + y + z = a$$

tengan una recta en común. Hallar también el vector de dirección de dicha recta.

28 Se consideran las rectas:

$$r_1: \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 1/2 \\ z = k \end{cases}$$

Determinar, en función de los valores de k, las posiciones relativas de r_1 y r_2, y su distancia mínima cuando se cruzan. ¿Para qué valores de k están ambas rectas en un plano?

Represente gráficamente ambas rectas para $k = 1$.

29 Dado el plano de ecuación π: $2x + 2y + z - 3 = 0$, y los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, -2)$, hallar el área del triángulo ABC, siendo C el pie de la perpendicular de A a π.

30 Un paralelogramo $ABCD$ tiene por vértices $A(3, 1, 2)$, $B(5, 3, 1)$ y $C(7, 4, 3)$.

Halle las coordenadas del punto D y el área del paralelogramo.

31 Calcule la distancia del punto $A(1, 2, 3)$ a la recta

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

así como la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.

32 Dadas las rectas

$$r_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-k}{3} = \frac{z}{-1} \; ; \; r_2: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{3}$$

a. Determinar k para que ambas rectas se corten en un punto. ¿Cuál es ese punto?
b. Halla la ecuación del plano que determinan ambas rectas al cortarse.
c. ¿Cuál es el ángulo formado por la rectas?
d. ¿Cuál es la distancia entre ambas rectas para un valor de k arbitrario?
e. ¿Cuál es el ángulo formado por el plano del apartado b) y el eje XX'?

Exprésense los ángulos en grados, minutos y segundos sexagesimales.

33
a. Halle el ángulo que forman los planos $2x - y + 3 = 0$, $3x + 5y - z = 0$.
b. Halle el ángulo que forma la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$$

con el plano $2x + y - 1 = 0$.

c. Halle la distancia del punto $P(4, 2, -1)$ al plano $x + y - 1 = 0$

d. Halle la distancia entre las rectas

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{1} \; ; \; \frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{5}$$

e. Halle el área del triángulo determinado por los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 0, 2)$ y $C(0, 2, -2)$.

34 Obtenga las coordenadas del punto P_1 simétrico del punto $P_2 = (3, 1, -2)$, con respecto a la recta de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

35 Obtenga la ecuación del plano que contiene a la recta

$$\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

y es perpendicular al plano $x + 2y + 3z - 5 = 0$

36 Se consideran las rectas

$$r_1 : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1/2 \\ z = k \end{cases}$$

determinar, en función de los distintos valores de k, las posiciones relativas de r_1 y r_2, y su distancia mínima cuando se cruzan. ¿Para qué valores de k están ambas rectas en un plano?

37 Hallar la distancia del punto $A = (1, 2, 3)$ a la recta

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

y la ecuación del plano π que pasa por A y es perpendicular a r.

38 Determinar los puntos de la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$$

que equidistan de los planos $\pi_1 : 3x + 4y - 1 = 0$ y $\pi_2 : 4x - 3z - 1 = 0$.

39 Sea P el plano definido por los puntos $P_0 = (1, 0, 1)$, $P_1 = (-1, 1, 1)$ y $P_2 = (0, -1, 2)$. Sea r_1 la recta que pasa por P_0 y P_1 , y r_2 la recta que pasa por P_0 y P_2 , y sea $Q = (0, 0, 1)$.

a. Hallar la ecuación de la recta r_3 que pasa por Q y es ortogonal al plano P.

b. Hallar la ecuación de la recta r_4 que pasa por Q y es paralela a r_1.

c. Hallar la distancia de r_4 a r_2.

40 Sean $P_1 = (0, 0, 1)$, $P_2 = (2, 0, 0)$, $P_3 = (0, 1, 0)$ y $P_4 = (-1, -1, -1)$.

a. ¿Hay algún plano que pase por los cuatro puntos? (Razonar la respuesta)

b. Hallar la recta r perpendicular al plano π, determinado por P_1, P_2 y P_3 , y que pasa por P_4.

c. Determinar el punto de corte de r y π.

41 Sean $P_1 = (1, -1, 0)$, $P_2 = (0, 2, -1)$ y $P_3 = (-1, 1, 2)$. Hallar:

a. El plano π_1 que contiene a los tres puntos.

b. El plano π_2 perpendicular a π_1 que contenga a P_1 y P_2.

c. Un plano π_3 que forme con π_1 y π_2 un sistema compatible determinado.

d. Un plano π_4 que forme con π_1 y π_2 un sistema compatible indeterminado.

e. Un plano π_5 que forme con π_1 y π_2 un sistema incompatible.

42 Dadas las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \left\{ \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-2} = z \right\}$$

a. Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen de coordenadas, y se apoya en r y s.

b. Hallar la ecuación del plano perpendicular a t que pasa por $(0, 0, 0)$.

43 Sean r y s las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y = 2 \\ z = -2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{-1}$$

a. Hallar la ecuación de la recta que se apoya en r y en s, y es perpendicular a ambas.

b. Hallar la distancia de r a s.

44

a. Determinar si los puntos $P = (0, 1, 0)$, $Q = (0, 0, -1)$, $R = (1, 0, 1)$ y $S = (1, 1, 1)$ están en el mismo plano.

b. Hallar la ecuación del plano π que pasa por P, Q y R, y de la recta r que es perpendicular a π y pasa por S.

c. Hallar la distancia de S a π.

45 Sean $P = (2, -10, 6)$ y $Q = (-2, 6, -2)$.

a. Hallar la ecuación del plano Π que pasa por el punto medio de P y Q, y es perpendicular al segmento que los une.

b. Hallar el área del triángulo determinado por los puntos de corte del plano Π.

c. Hallar la distancia del origen de coordenadas al plano Π.

46 Dados los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$ y $C = (1, 6, k)$,

a. hallar para qué valores de k los tres puntos están alineados,

b. hallar si para algún valor de k los tres puntos son vértices de un triángulo de área 2,

c. hallar la distancia de C a la recta que pasa por A y B, como función de k.

47 Sean

$$r_1 \equiv \frac{x}{2} = y + 6 = \frac{z-1}{3} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \frac{x+4}{6} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-2}{2}$$

a. Comprobar que ambas rectas se cortan en un punto.

b. Calcular el punto de intersección, P.

c. Dados el punto P obtenido en el apartado anterior, y $R = (-4, -1, 2)$, encontrar un punto Q en r_1 para que el triángulo de vértices P, Q y R sea equilátero.

48 Considere la recta $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4}$ y el plano $\Pi\colon 2x + 4y + 4z = 5$

a. Justifique por qué la recta r y el plano Π son paralelos.

b. Calcule la distancia entre el plano Π y la recta r.

c. Calcule la ecuación implícita del plano Π' que es perpendicular a Π y contiene a r.

49 Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 7 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$ y el punto $P = (1, 2, 3)$.

a. Calcule la ecuación paramétrica del plano Π que es perpendicular a la recta r y contiene al punto P.

b. Considere la recta $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 + 2\alpha \end{cases}$. ¿Cuál es la posición relativa entre la recta s y el plano Π?

c. Calcule cuáles son las coordenadas del punto Q de la recta s que está más próximo a la recta r. Justifique su respuesta.