Repaso del Bloque de Análisis

Ejercicio 1 *Calcula los siguientes límites*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{arc\,tg}(x)-x}{2x-\operatorname{arc\,sen}(x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln(x)\operatorname{tg}(x)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)+(1-x)^2-1}{\ln(\cos(x))}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)-x}{x-\operatorname{sen}(x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(2x-\sqrt{1+x+4x^2})$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}-\frac{1}{x}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}(x)}{1-\cos(2x)}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1}x^{\frac{x}{\operatorname{sen}(\pi x)}}$

Ejercicio 2 *a) Calcula en función del parámetro α el límite* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)}$

b) Calcula m para que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{\operatorname{sen}(2x)}=3.$

c) Calcula b para que los siguientes límites sean números reales, y obtén dichos límites.

I) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)+b\operatorname{sen}(x)}{x^3}$

II) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{b}{2x}\right)$

Ejercicio 3 *Dada la función* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x+2}}{1-|x|}+2 & si\quad x<2\\[2ex] \dfrac{x^3}{1-x^2} & si\quad x\geq 2\end{cases}$*, estudiar la continuidad (clasificando las discontinuidades encontradas), y obtener las ecuaciones de las asíntotas.*

Ejercicio 4 *Estudia la continuidad y las asíntotas de* $y=\dfrac{\operatorname{arc\,tg}(x)}{1-e^{-x}}$

Ejercicio 5 *Dada la función* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-1}{2x} & si\quad x\neq 0\\ b & si\quad x=0\end{cases}$

a) Calcula la relación entre a y b para que f sea continua.

b) Para $b=-1$, utilizando la definición de derivada de una función en un punto, calcula $f'(0)$ (en caso de que no exista $f'(0)$, justifícalo).

c) Para $b=-1$ determinar las ecuaciones de las asíntotas de f

Ejercicio 6 *Dada* $f(x)=\begin{cases}e^{ax}-bx^2 & si\quad x\leq 0\\ x^2+bx+a & si\quad 0<x<2\\ 5x+2 & si\quad x\geq 2\end{cases}$

a) Determinar a y b para que f sea derivable en $x=0$.

b) *Para los valores obtenidos en el apartado anterior, estudiar la derivabilidad en $x = 2$, y obtener la expresión de la función derivada.*

c) *Para los valores encontrados de a y b encontrar la ecuación de las rectas tangente y normal a $y = f(x)$ en $x = 1$.*

Ejercicio 7 *Dada la función $f(x) = |x^2 + 5x - 6|$:*

a) *Determina si verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[-7, -4]$.*

b) *Estudia la derivabilidad de f en $\mathbb{R}$.*

c) *Estudia la monotonía y la existencia de puntos extremos.*

d) *Estudia la curvatura y la existencia de puntos de inflexión.*

e) *Calcula el área encerrada por la curva $y = f(x)$ y el eje OX*

f) *Calcula el área encerrada por la curva $y = f(x)$ y la recta de ecuación $y = -x + 1$.*

g) *¿Existe algún $c \in (-4, 0)$ en el cual la recta tangente a $y = f(x)$ sea paralela al segmento de extremos $(-4, 10)$ y $(0, 6)$?. Justificar la respuesta utilizando el teorema adecuado, y en caso afirmativo, calcular la ecuación de dicha recta tangente.*

Ejercicio 8 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} e^x - x & si \quad x < 0 \\ \ln(x^2 + 1) & si \quad 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

a) *Estudia su derivabilidad.*

b) *Calcula el área comprendida entre $y = f(x)$ y el eje OX entre $x = -1$ y $x = 4$*

Ejercicio 9 *Calcula m, n, y b (siendo $b > 1$) para que* $f(x) = \begin{cases} mx^2 + nx + b & si \quad x < 1 \\ 3x + 1 & si \quad x \leq 1 \end{cases}$ *verifique las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[-2, b]$, y determinar el valor del punto $x = c$ cuya existencia establece dicho teorema.*

Ejercicio 10 *Calcular las siguientes integrales inmediatas.*

a) $\displaystyle\int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2}{x^2} + 3\sqrt[3]{x} \right) dx$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{x^3} + 4\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x^3} \right) dx$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2x^2\sqrt{x} \right) dx$

d) $\displaystyle\int \sqrt{2x + 3}\, dx$

e) $\displaystyle\int \cos(a + bx)\, dx$

f) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{cotg}\left(\frac{x}{5}\right)}\, dx$

h) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,(1 + \operatorname{tg}^2 x)\, dx$

i) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - 9\cos^2 x}\, dx$

j) $\displaystyle\int \frac{\cos(\pi x)}{\frac{\pi}{2} + 3\operatorname{sen}(\pi x)}\, dx$

k) $\displaystyle\int \frac{x}{1 + 2x^2}\, dx$

l) $\displaystyle\int \frac{x}{1 + x^2}\, dx$

m) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

n) $\displaystyle\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$

ñ) $\displaystyle\int \frac{9x\,\text{sen}(x^2)}{5\sqrt{2+\cos(x^2)}}\,dx$

Ejercicio 11 *Calcular las siguientes integrales.*

a) $\displaystyle\int x\ \text{sen}\ x\,dx$

b) $\displaystyle\int x\,e^x\,dx$

c) $\displaystyle\int (x^2+1)\cos\ x\,dx$

d) $\displaystyle\int \ln\ x dx$

e) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ \ln\ x\,dx$

f) $\displaystyle\int \text{arc tg}\ x\,dx$

g) $\displaystyle\int x\ \text{arc tg}\ x\,dx$

h) $\displaystyle\int x^2\cos\ 3x\,dx$

i) $\displaystyle\int e^x\ \text{sen}\ x\,dx$

j) $\displaystyle\int \text{sen}^2\ x\,dx$

k) $\displaystyle\int x^2\,e^{-x}\,dx$

Ejercicio 12 *Calcular por cambio de variable las siguientes integrales.*

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln\ x}}{x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{e^x-3e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

d) $\displaystyle\int \frac{1+\ln\ x}{x(2+\ln\ x)}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-1}$

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4-9x)}$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

j) $\displaystyle\int \sqrt{16-x^2}\,dx$

k) $\displaystyle\int \sqrt{9-2x^2}\,dx$

Ejercicio 13 *Calcular las siguientes integrales racionales.*

a) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{5x}{2x^2+3}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^3-x}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{5-x^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1-4x}{2x^3-x^2-x}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-3e^x+2}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x}{e^x}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+16}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{4x^3+2x-1}{2x+1}\,dx$

Ejercicio 14 *Justifica que* $f_1(x) = 1 + \text{sen}^2(x)$ *y* $f_2(x) = -\dfrac{\cos(2x)}{2}$ *son primitivas de la misma función, y calcula dicha función.*

Ejercicio 15 *Determina la expresión de* $f(x)$ *sabiendo que pasa por el punto* $(1,-2)$*, y que* $f'(x) = x\cos(1-x^2)$

Ejercicio 16 *Sea* f *continua en* $[0,5]$*, y derivable en* $(0,5)$*, con* $f(0) = 3$*. Calcular cuánto tiene que valer* $f(5)$ *para asegurar que existe* $c \in (0,5)$ *con* $f'(c) = 8$*. Enuncia el teorema que se utiliza y explica su interpretación geométrica.*

Ejercicio 17 *De una función* f *se sabe que pasa por el origen de coordenadas, y que* $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$*. Encontrar la expresión analítica de* f*.*

Ejercicio 18 *Enuncia el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, y calcula la ecuación de la recta tangente a la función* F *en* $x = 0$*, siendo* $F(x) = \displaystyle\int_0^x (1+\cos(t^2))\,dt$

Ejercicio 19 *Sabiendo que* $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x^2)$*, con* f *una función continua en* $\mathbb{R}$*, calcula* $f(2)$*.*

Ejercicio 20 *Estudia la curvatura y la existencia de puntos de inflexión de la función* $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2+t}\,dt$

Ejercicio 21 *Calcular*

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen}(x)}{3+\text{sen}^2(x)}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{2}\,dx$

d) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^4-1}{x^4+x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3(x)\,dx$

g) $\displaystyle\int_1^6 \left(\frac{1}{x} - \ln(x)\right)dx$

h) $\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x^2)\,dx$

i) $\displaystyle\int_2^3 \frac{5x^3-3x+1}{x^3-x}\,dx$

j) $\displaystyle\int_1^e \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\,dx$

Ejercicio 22 *Calcular el área comprendida entre las gráficas de* $y = \text{sen}(x)$ *e* $y = \text{sen}(2x)$ *en* $[0,\pi]$

Ejercicio 23 *Calcular el área del recinto del primer cuadrante limitado por las curvas* $y = x$*,* $y = \dfrac{1}{x^3}$*, y* $x = 3$ *(hacer un esbozo del recinto)*

Ejercicio 24 *Esbozar el recinto limitado por las curvas* $y = |x^2-2x|$ *e* $y = 6x - x^2$*, y calcular su área.*

Ejercicio 25 *Representa gráficamente la función $f(x) = x\ln(x)$ indicando: dominio, monotonía y extremos, curvatura y puntos de inflexión, ecuaciones de sus asíntotas. Calcula el área del recinto del primer cuadrante encerrado por la gráfica de $y = f(x)$ y su recta tangente en $x = e$*

Ejercicio 26 *Sea $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & si \quad x \leq 1 \\ \ln(x) & si \quad x > 1 \end{cases}$. Hallar el área limitada por la gráfica de $y = f(x)$ y la recta $y = 1$*

Ejercicio 27 *Determinar el valor de $a > 0$ para que el área del recinto limitado por la curva $y = x^3 - ax$ y el eje OX sea de $8\,u^2$*

Ejercicio 28 *Calcular:*

a) El área del recinto limitado por $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$ y $y = \dfrac{x^2}{2}$, e $y = \dfrac{4}{x}$.

b) El área comprendida entre las curvas $y = \dfrac{x^2}{2}$ e $y = \dfrac{4}{x}$ entre $x = 1$ y $x = 3$.

c) El área entre las cuvas $f(x) = -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$ y $g(x) = -x$

Ejercicio 29 *Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y:*

a) su recta tangente en $(3, 4)$, y el eje OX.

b) su recta normal en $(3, 4)$

(En el dibujo de la parábola, indicar los puntos de corte con los ejes y el vértice)

Ejercicio 30 *Un polinomio p de grado 3 verifica que $\int_0^1 p(x)\,dx = 2$, la recta tangente a la curva $y = p(x)$ en $x = 0$ tiene por ecuación $y = x + 1$, y la curva $y = p(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$. Calcular la ecuación del polinomio.*

Ejercicio 31 *Sea f continua en $[0, 4]$, verificando $\int_1^2 f(x)\,dx = 2$ y $\int_1^4 f(x)\,dx = -4$. Calcula el valor de $\int_2^4 5f(x)\,dx = 2$ indicando las propiedades utilizadas.*

Ejercicio 32 *Dada la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$. ¿Existe algún $c \in [1, 2]$ para el cual $\int_1^2 f(x)\,dx = f(c)$?. Justifica la respuesta, y en caso afirmativo, calcula su valor.*

Ejercicio 33 *Un tablero de forma cuadrada, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina según una recta. El trozo menor es un triángulo rectángulo de catetos 40 cm y 32 cm. Hallar las dimensiones del tablero rectangular de mayor área que se puede obtener con el trozo mayor, de modo que los lados sean paralelos a los del tablero primitivo.*

Ejercicio 34 *Un barco B está anclado a 9 km del punto más cercano P de una costa que forma una línea recta. A 15 km del punto P , en la costa, hay un campamento C.*

Un mensajero debe ir desde el barco al campamento; teniendo en cuenta que puede remar a una velocidad de 4 km/h, y andar a una velocidad de 5 km/h, hallar el punto Q de la costa, entre P y C , en el que debe tomar tierra, para llegar al campamento lo antes posible.

Ejercicio 35 *Calcule las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 2 cm de radio.*

Ejercicio 36 *Hallar los puntos de la curva* $y^2 = 4x$ *cuya distancia al punto* $(4, 0)$ *sea mínima.*

Ejercicio 37 *En un terreno llano se desea acotar una parcela rectangular usando* $80\,m$ *de tela metálica para vallarla, pero dejando en uno de sus lados una abertura de* $20\,m$. *Determinar las dimensiones de la parcela rectangular de área máxima que puede acotarse de esa manera, y el valor de dicha área.*

Ejercicio 38 *De entre todos los rectángulos simétricos con respecto al eje OY, y con vértices en el eje OX y en la curva* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, *halla los vértices del de área máxima.*

Ejercicio 39 *Halla el radio del cilindro de máximo volumen inscrito en un cono de* $6\,m$ *de radio y* $8\,m$ *de altura. (El volumen de un prisma o de un cono es* $V =$ *Área base* $\times$ *Altura*

Ejercicio 40 *La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. Si gira alrededor de uno de los catetos, ¿qué medida han de tener estos para que el volumen del cono engendrado sea máximo?*

Ejercicio 41 *Se quiere limitar una parcela de* $24\,m^2$ *por una valla rectangular, y además dividirla en dos partes iguales por medio de otra valla paralela a uno de los lados. ¿Qué dimensiones deben elegirse para que la cantidad de valla sea mínima?*

Ejercicio 42 *De todos los cilindros isncritos en una esfera de radio* $1\,m$, *hallar las dimensiones del que tenga volumen máximo.*

Ejercicio 43 *Dos partículas se mueven en el plano. En cada instante de tiempo t, las posiciones de ambas son respectivamente* $A = \left(\frac{1}{2}(t-1), \frac{\sqrt{3}}{2}(1-t)\right)$, *y* $B = (2-t, 0)$. *Determinar el instante en el que se encuentran más próximas, y cuál es esa distancia.*

Ejercicio 44 *De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto* $(1, 2)$, *encontrar la ecuación de la que forma con las partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima.*

Ejercicio 45 *Se desea construir un depósito en forma de cilindro rectoa, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de* $125\,m^3$. *Hallar el radio de la base y la altura para que la superficie sea mínima (El área lateral de un cilindro es* $A_{lat} = 2\pi\, R\, h$*)*