$\boxed{8}$ a) $\text{Dom} f = (-\infty, 4]$

Como es una función definida a trozos, y cada trozo es una función derivable en su dominio, f es derivable al menos en $\mathbb{R} - \{0\}$.

En $x=0$:

1º) Estudio de la continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \ln 1 = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x^2+1) = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x - x = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ no es continua en } x=0 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow f$ no es derivable en $x=0$ (ya que la continuidad es necesaria para la derivabilidad

Por tanto, f es derivable en todo su dominio salvo $x=0$.

b) Hay que determinar la posición de $y=f(x)$ con respecto al eje OX:

- Si $x<0$: $e^x - x = 0 \Longleftrightarrow e^x = x$.
  Como $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $e^x - x > 0 \quad \forall x < 0$
- Si $x \in [0,4]$: $\ln(1+x^2) = 0 \Longleftrightarrow 1+x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = 0$
  Por tanto, $\forall x \in [0,4] \quad \ln(1+x^2) \geq 0$

Es decir

$$\text{ÁREA} = \int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} e^x - x\,dx + \int_{0}^{4} \ln(1+x^2)\,dx$$

1º) $$\int_{-1}^{0} e^x - x\,dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 1 - 0 - \left(e^{-1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{e}$$

2º) • $$\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$$

$u = \ln(1+x^2) \Longrightarrow du = \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$dv = dx \Longrightarrow v = x$

• $$\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = 2\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = 2\int 1 - \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= 2\left(x - \text{arctg}\, x\right) + C$$

Por tanto $\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - 2(x - \text{arctg}\, x) + C$

$$\Longrightarrow \int_0^4 \ln(1+x^2)\,dx = \left[x\ln(1+x^2) - 2x + 2\,\text{arctg}\, x\right]_0^4 =$$

$$= 4\ln 17 - 8 + 2\,\text{arctg}\, 4$$

Finalmente:

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = 4\ln(17) + 2\,\text{arctg}\, 4 - \frac{1}{e} - \frac{13}{2}$$