$\boxed{7}$ a) $x^2+5x-6=0 \iff x=1,-6$

SIGNO x^2+5x-6: $+$ $\quad -6 \quad$ $-$ $\quad 1 \quad$ $+$

Por tanto $f(x)=\begin{cases} x^2+5x-6 & \text{si } x\leq -6 \text{ o } x\geq 1 \\ -x^2-5x+6 & \text{si } -6<x<1 \end{cases}$

f es continua y derivable al menos en $\mathbb{R}-\{-6,1\}$.
Veamos si es continua y derivable en $x=-6$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-6)=0 \\ \lim\limits_{x\to -6^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -6^+}(-x^2-5x+6)=0 \\ \lim\limits_{x\to -6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -6}(x^2+5x-6)=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x=-6$$

$$f'(-6^+)=\lim_{x\to -6^+}\frac{f(x)-f(-6)}{x-(-6)}=\lim_{x\to -6^+}\frac{-x^2-5x+6-0}{x+6}=$$

$$=\lim_{x\to -6^+}\frac{-(x-1)\cancel{(x+6)}}{\cancel{(x+6)}}=7$$

$$f'(-6^-)=\lim_{x\to -6^-}\frac{f(x)-f(-6)}{x-(-6)}=\lim_{x\to -6^-}\frac{x^2+5x-6-0}{x+6}=$$

$$=\lim_{x\to -6^-}\frac{(x-1)\cancel{(x+6)}}{\cancel{(x+6)}}=-7$$

Por tanto, f no es derivable en $x=-6$

Las hipótesis del Teorema de Rolle para esta función serían: f continua en $[-7,-4]$, f derivable en $(-7,-4)$, y $f(-7)=f(-4)$. En este caso, al no ser f derivable en $x=-6\in(-7,-4)$, no se verifican las hipótesis.

b) Falta estudiar la derivabilidad en $x=1$

b) Falta estudiar la derivabilidad en $x = 1$:

Continuidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2+5x-6 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x^2-5x+6) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ continua en } x=1$$

Derivabilidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2+5x-6-0}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x-1)(x+6)}{x-1} = 7 \\ f'(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-x^2-5x+6}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-(x-1)(x+6)}{x-1} = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f no es derivable en $x=1$

A

…, tanto, f es derivable en $\mathbb{R} - \{-6, 1\}$

PROPIEDADES DE INTERÉS (para dudar menos:)

1) Si $f(x)$ es una función continua, entonces $g(x) = |f(x)|$ es una función continua

2) Si f es una función derivable, entonces $g(x) = |f(x)|$ es una función derivable salvo en aquellos valores en los que se cumpla $f(x)=0$

c) Como f no es derivable en $x=1$ y $x=-6$, entonces

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{si } \underline{\underline{x<-6 \text{ o } x>1}} \\ -2x-5 & \text{si } -6<x<1 \end{cases}$$

Primero buscamos los puntos críticos de $f(x)$:

1) $2x+5=0 \iff x=-\frac{5}{2}$.

Pero $x=-\frac{5}{2} \notin (-6,1)$, por tanto $x=-\frac{5}{2}$ no es un punto crítico

2) $-2x-5=0 \iff x=-\frac{5}{2} \in (-6,1)$

Por tanto, el único punto crítico es $x=-\frac{5}{2}$

Ahora estudiamos las variaciones de signo de $f'(x)$:

	$2x+5$		$-2x-5$			$2x+5$
SIGNO f'	$-$	-6	$+$	$-\frac{5}{2}$	$-$	1	$+$

Es decir:

f decrece en $(-\infty,-6) \cup \left(-\frac{5}{2},1\right)$

f crece en $\left(-6,-\frac{5}{2}\right) \cup (1,+\infty)$

f tiene un máximo relativo en $x=-\frac{5}{2}$

f tiene dos mínimos relativos en $x=-6$ y $x=1$ (aunque f no sea derivable en estos puntos, la función existe, y la derivada cambia de signo)

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, el máximo relativo no es absoluto.

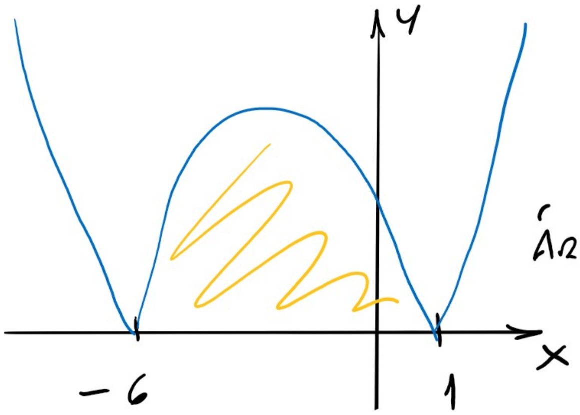
Como $f(1)=f(-6)=0$ y $f(x)\geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$, entonces los mínimos relativos también son absolutos

7d) $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -6 \text{ o } x > 1 \\ -2 & \text{si } -6 < x < 1 \end{cases}$

Por tanto, f es convexa en $(-\infty,-6)\cup(1,+\infty)$, y cóncava en $(-6,1)$.

En $x=-6$ y en $x=1$ hay puntos de inflexión (aunque no sea derivable) porque f'' cambia de signo

e) Hacemos un esbozo de la gráfica



$$\text{ÁREA} = \int_{-6}^{1} -x^2-5x+6\,dx$$

$$\text{ÁREA} = \left[-\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x\right]_{-6}^{1} = -\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+6-\left(\frac{216}{3}-90-36\right)$$

$$= -\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+6-72+90+36 = -\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+60 = \frac{-2-15+360}{6}$$

$$= \frac{343}{6}\ u^2$$

f) $f(x)=\begin{cases} x^2+5x-6 & \text{si } x\le -6 \text{ o } x\ge 1 \\ -x^2-5x+6 & \text{si } -6\le x\le 1\end{cases}$

Intersección de $y=f(x)$ con $y=-x+1$:

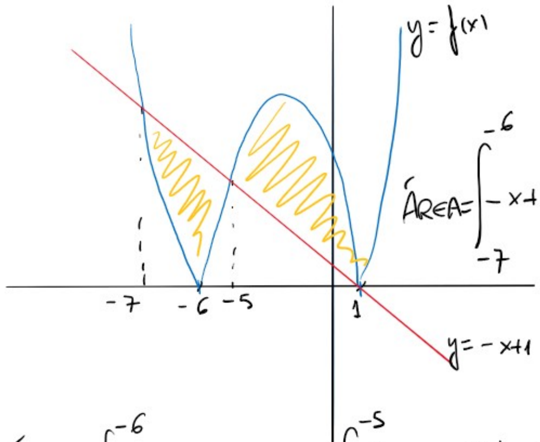
1º) $x^2+5x-6=-x+1 \Rightarrow x^2+6x-7=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=1,\ x=-7$ (ambos en $(-\infty,-6]\cup[1,+\infty)$)

2º) $-x^2-5x+6=-x+1 \Rightarrow 0=x^2+4x-5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=1,\ x=-5$ (ambos en $[-6,1]$)

Por tanto, si hacemos un esbozo de la región:



$$\text{ÁREA}=\int_{-7}^{-6} -x+1-(x^2+5x-6)\,dx+\int_{-6}^{-5} -x+1-(-x^2-5x+6)\,dx+\int_{-5}^{1} -x^2-5x+6-(-x+1)\,dx$$

$$\text{ÁREA}=\int_{-7}^{-6} -x^2-6x+7\,dx+\int_{-6}^{-5} x^2+4x-5\,dx+\int_{-5}^{1} -x^2-4x+5\,dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-3x^2+7x\right]_{-7}^{-6}+\left[\frac{x^3}{3}+2x^2-5x\right]_{-6}^{-5}+\left[-\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_{-5}^{1}=$$

$$=72-108-42-\left(\frac{343}{3}-147-49\right)+\frac{(-125)}{3}+50+25-\left(-\cancel{72}+\cancel{72}+30\right)+\frac{(-1)}{3}-2+5-\left(\frac{125}{3}-50-25\right)=$$

$$=-78-\frac{343}{3}+196-\frac{125}{3}+75-30-\frac{1}{3}+3-\frac{125}{3}+75=$$

$$=241-198=43\ u^2$$

g) Como f es continua en $[-4,0]$ y derivable en $(-4,0)$, por el Teorema Fundamental del Cálculo Diferencial (o de Lagrange), existe un $c\in(-4,0)$ tal que $f(0)-f(-4)=f'(c)\cdot(0-(-4))$.

Es decir, un $c\in(-4,0)$ en el cual la recta tangente a $y=f(x)$ es paralela a la secante por $(-4,f(-4))=(-4,10)$ y $(0,f(0))=(0,6)$.

(El teorema no dice nada sobre la unicidad de c, podría haber varios)

$$\frac{f(0)-f(-4)}{0-(-4)}=\frac{6-10}{4}=-1 \Rightarrow \exists c\in(-4,0)\ /\ f'(c)=-1$$

En $(-4,0)$, $f'(x)=-2x-5 \Rightarrow -2c-5=-1 \Rightarrow c=-2$

La recta tangente buscada es $y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$:

$y-12=-(x+2) \Rightarrow y=-x+10$