$\boxed{6}$ a) Para la derivabilidad es necesaria la continuidad

Continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=e^{a0}-b\cdot 0^2=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+bx+a=a \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{ax}-bx^2=1 \end{array}\right\} \Longrightarrow a=1$$

Derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{f \text{ cont. en } x=0}{=} \dfrac{0}{0} \xRightarrow{L'Hsp.} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f'(x)}{1} = \\ = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x+b=b \\ f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{f \text{ cont en } x=0}{=} \dfrac{0}{0} \xRightarrow[L'Hsp.]{} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f'(x)}{1} = \\ = \lim\limits_{x\to 0^-} ae^{ax}-2bx=a \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow b=a$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=a \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \end{array}}$$

b) Para $a=b=1 \Longrightarrow f(x)=\begin{cases} e^x-x^2 & \text{si } x\le 0 \\ x^2+x+1 & \text{si } 0<x<2 \\ 5x+2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

Primero estudiamos la continuidad en $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=5\cdot 2+2=12 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} (x^2+x+1)=7 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} (5x+2)=12 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ no es continua en } x=2$$

Por tanto, f no es derivable en $x=2$

Es decir, f es derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$

$$f'(x)=\begin{cases} e^x-2x & \text{si } x\le 0 \\ 2x+1 & \text{si } 0<x<2 \\ 5 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

c) Recta tangente: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$$y-3=3(x-1) \Longrightarrow y=3x$$

Recta normal: $y-f(1)=-\dfrac{1}{f'(1)}(x-1)$

$$y-3=-\frac{1}{3}(x-1) \Longrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$$