$\boxed{5}$ f es continua al menos en $\mathbb{R}-\{0\}$

a) En $x=0$:

$$f(0)=b$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{2x}=\frac{0}{0}=\text{IND}\overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}}{2}=\frac{a}{2}$$

Por tanto, para que f sea continua en $x=0$ debe cumplirse $\frac{a}{2}=b$

b) Si $b=-1$, como para la derivabilidad es necesaria la continuidad, entonces $a=2b \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow a=-2 \Longrightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-2x}-1}{2x} & \text{si } x\neq 0\\ -1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Por definición, $f'(0)$ si existen las derivadas laterales, son números reales, y coinciden:

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^{-2x}-1}{2x}-(-1)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-2x}-1+2x}{2x^2}=\frac{0}{0}\overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0^+}\frac{-2e^{-2x}+2}{4x}=\frac{0}{0}$$

$$\overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0^+}\frac{4e^{-2x}}{4}=1\in\mathbb{R}$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-2x}-1+2x}{2x^2}=1\in\mathbb{R}$$

Por tanto, f es derivable en $x=0$, con $f'(0)=1$

c) ASÍNTOTAS VERTICALES: No hay

ASÍNTOTAS HORIZONTALES: $y=0$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{-2x}-1}{2x}=\frac{0}{+\infty}=0\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-2x}-1}{2x}=\frac{+\infty}{-\infty}\overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-2e^{-2x}}{2}=-\infty\notin\mathbb{R}$$

ASÍNTOTAS OBLÍCUAS: (Solo se comprueban en $x\to-\infty$, porque en $x\to+\infty$ hay asíntota horizontal)

$$m=\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{e^{-2x}-1}{2x}}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-2x}-1}{2x^2}=$$

$$=\frac{+\infty}{+\infty}\overset{\text{L'Hôp}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to -\infty}\frac{-2e^{-2x}}{4x}=\frac{-\infty}{-\infty}\overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{4e^{-2x}}{4}=+\infty\notin\mathbb{R}$$

No hay asíntotas oblícuas