

$$\boxed{30} \quad p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow p'(0) = c$$

Como la recta tangente a  $y = p(x)$  en  $x = 0$  es  $y = x + 1$ , con pendiente  $m = 1$ , entonces,  $p'(0) = 1$

Es decir:  $\boxed{c = 1}$

$$p''(x) = 6ax + 2b \rightarrow p''(0) = 2b$$

Como  $y = p(x)$  tiene un punto de inflexión en  $x = 0$ ,  
 $p''(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

El punto de tangencia entre  $y = x + 1$  e  $y = p(x)$  en  $x = 0$  es  $(0, 1)$

$$p(0) = 1 \Rightarrow \boxed{d = 1}$$

$$\int_0^2 ax^3 + x + 1 dx = 2 \Rightarrow \left[ \frac{a}{4}x^4 + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 = 4a + 2 + 2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

Por tanto,

$$\boxed{p(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x + 1}$$