

27

$$y = x^3 - ax$$

1) Puntos de corte con el eje OX

$$\begin{cases} y=0 \\ y=x^3-ax \end{cases} \Rightarrow x^3-ax=0 \Leftrightarrow x(x^2-a)=0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=\pm\sqrt{a} \end{matrix}$$

Necesariamente, para que exista el recinto cerrado, tiene que cumplirse $a > 0$

2) Posición de la curva con respecto eje OX

$$f'(x) = 3x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$$

signo f'

$$\begin{array}{c} + \quad | \quad - \quad | \quad + \\ \hline -\sqrt{\frac{a}{3}} \quad \quad \quad \sqrt{\frac{a}{3}} \end{array}$$

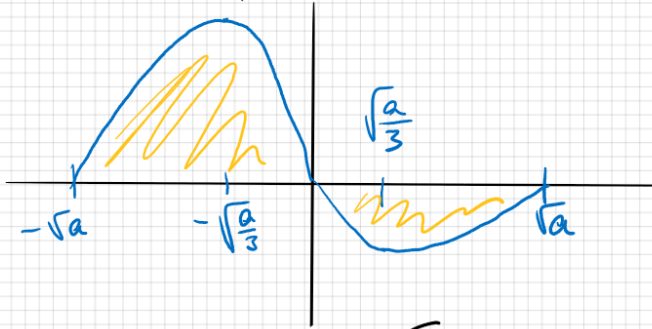
$$f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - a\sqrt{\frac{a}{3}} = -\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} < 0$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} + a\sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} > 0$$

f crece en $(-\infty, -\sqrt{\frac{a}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty)$

f decrece en $(-\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}})$

$$f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - a\sqrt{\frac{a}{3}}$$



$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-\sqrt{a}}^0 (x^3 - ax) dx + \int_0^{\sqrt{a}} (0 - (x^3 - ax)) dx = \int_{-\sqrt{a}}^0 (x^3 - ax) dx + \int_0^{\sqrt{a}} (ax - x^3) dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - a\frac{x^2}{2} \right]_{-\sqrt{a}}^0 + \left[a\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{a}} = -\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \right) + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Área} = \frac{a^2}{2} = 8 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = \pm 4 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

$a > 0$