25

$\text{Dom} f = (0, +\infty)$

Puntos de corte con eje OX: $\begin{cases} y = 0 \\ y = x\ln x \end{cases} \Longleftrightarrow 0 = x\ln x \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin \text{Dom} f \\ x = 1 \in \text{Dom} f \end{cases}$

Pto: $(1, 0)$

Puntos de corte con OY: $\begin{cases} x = 0 \\ y = x\ln x \end{cases}$ No hay $0 \notin \text{Dom} f$

Asíntotas:

Verticales $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0\cdot(-\infty) = \text{IND} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \dfrac{-\infty}{+\infty} \overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0 \Rightarrow$ No hay asíntota

Horizontales $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln x = +\infty \Rightarrow$ No hay asíntotas

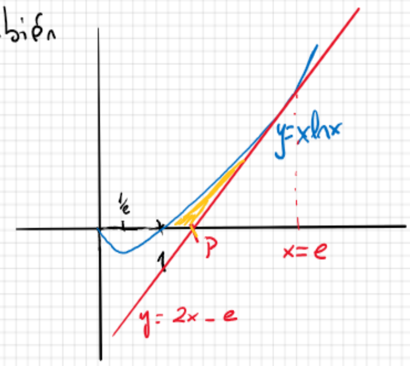
Oblicuas $m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \Rightarrow$ No hay

Monotonía:

$f'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = 0 \Longleftrightarrow \ln x = -1 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{e}$

SIGNO $f'(x) = \ln x + 1$: $(0, \frac{1}{e})$: $-$; $(\frac{1}{e}, +\infty)$: $+$ $\Rightarrow \begin{cases} f \text{ crece en } \left(\frac{1}{e}, +\infty\right) \\ f \text{ decrece en } \left(0, \frac{1}{e}\right) \end{cases}$

En $x = \frac{1}{e}$ hay un mínimo relativo (que también es absoluto)



Curvatura:

$f''(x) = \frac{1}{x}$ SIGNO f'': $(0, +\infty)$: $+$

f es convexa en $(0, +\infty)$

No hay puntos de inflexión

Recta tangente en $x = e$:

$\begin{rcases} f'(e) = \ln(e) + 1 = 2 \\ f(e) = e\cdot\ln(e) = e \end{rcases} \Longrightarrow y - e = 2(x - e) \Rightarrow \boxed{y = 2x - e}$

Para determinar bien el recinto de integración, hay que determinar P:

$P = \begin{cases} y = 0 \\ y = 2x - e \end{cases} \Rightarrow x = \frac{e}{2} \Rightarrow P = \left(\frac{e}{2}, 0\right)$

$$\text{ÁREA} = \int_1^{e/2} x\ln x\,dx + \int_{e/2}^{e} x\ln x - (2x - e)\,dx$$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = x\,dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$$\text{ÁREA} = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^{e/2} + \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} - x^2 + ex\right]_{e/2}^{e} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4}\cdot\ln\left(\frac{e}{2}\right) - \frac{1}{4}\cdot\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \cancel{e^2} + \cancel{e^2} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4}\ln\left(\frac{e}{2}\right) - \frac{1}{4}\cdot\frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{e^2}{2}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{e^2}{8}\ln\left(\frac{e}{2}\right)} - \cancel{\frac{e^2}{16}} + \frac{1}{4} + \cancel{\frac{e^2}{2}} - \cancel{\frac{e^2}{4}} - \cancel{\frac{1}{8}e^2\ln\left(\frac{e}{2}\right)} + \cancel{\frac{e^2}{16}} + \cancel{\frac{e^2}{4}} - \cancel{\frac{e^2}{2}} = \boxed{\frac{1}{4}}$$