Cálculo de límites

Matemáticas II

IES O Couto

curso 2019-2020

Propiedades para el cálculo de límites (I)

- Si existe $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ (siendo L y a números reales o un infinito), entonces L es único.
- Dadas las funciones f, g, y h, definidas en un entorno de $x = a$ (con $a \in \mathbb{R}$ o infinito), y verificando $f \leq g \leq h$ en un entorno de $x = a$, entonces:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L \, (\text{real o infinito}) \implies \exists \lim_{x \to a} h(x) = L$$

- Si f es una función acotada en un entorno de $x = a$ (con $a \in \mathbb{R}$ o infinito), y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, entonces:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$$

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, y $L > 0$ (con $a \in \mathbb{R}$ o infinito), entonces $f(x) > 0$ en un entorno de a.
  Análogamente, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, y $L < 0$ (con $a \in \mathbb{R}$ o infinito), entonces $f(x) < 0$ en un entorno de a.

Propiedades para el cálculo de límites (II)

Operaciones con límites

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$, y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ (con a, L_1 y L_2 reales o infinitos), entonces, salvo en los casos de indeterminación, se cumple:

- $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = L_1 + L_2$
- $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$
- $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = L_1 - L_2$
- $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{L_1}{L_2}$
- $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = L_1^{L_2}$

Indeterminaciones

Las propiedades de las operaciones con límites no pueden aplicarse para obtener directamente el valor de un límite en los casos siguientes, conocidos como indenterminaciones:

I) $+\infty - \infty$

II) $0 \cdot \infty$

III) $\dfrac{0}{0}$ $\qquad \dfrac{\infty}{\infty}$

IV) 0^0 $\qquad \infty^0$ $\qquad 1^\infty$

Ejercicios

Ejercicio 1

Calcula los siguientes límites

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{arc\,tg}(x) - x}{2x - \operatorname{arc\,sen}(x)}$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \ln(x)\operatorname{tg}(x)$

c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) + (1-x)^2 - 1}{\ln(\cos(x))}$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \operatorname{sen}(x)}$

e) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} (2x - \sqrt{1 + x + 4x^2})$

f) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}(x)} - \frac{1}{x}\right)$

g) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{tg}(x)}{1 - \cos(2x)}$

h) $\displaystyle \lim_{x\to 1} x^{\frac{x}{\operatorname{sen}(\pi x)}}$

Soluciones al ejercicio 1

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{2\,\mathrm{arc\,tg}(x)-x}{2x-\mathrm{arc\,sen}(x)}=\frac{0}{0}=IND\overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+x^2}-1}{2-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=-1$$

b) $$\lim_{x\to 0^+}\ln(x)\,\mathrm{tg}(x)=-\infty\cdot 0=IND\implies$$

$$\implies\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)\,\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}=\lim_{x\to 0^+}\ln(x)\,\mathrm{sen}(x)=\lim_{x\to 0^+}\cos(x)=1$$

Es decir:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(x)\,\mathrm{tg}(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln(x)\,\mathrm{sen}(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{\mathrm{sen}(x)}}=\frac{+\infty}{+\infty}=IND$$

$$\overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{cos(x)}{sen^2(x)}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-sen^2(x)}{x\cos(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-sen^2(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{cos(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\mathrm{sen}^2(x)}{x}=\frac{0}{0}\overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\,\mathrm{sen}(x)\,\cos(x)}{1}=0$$

Soluciones al ejercicio 1

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)+(1-x)^2-1}{\ln(\cos(x))}=\frac{0}{0}=IND\overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)-2(1-x)}{\frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\left(2\cos(2x)-2+2x\right)}{-\operatorname{sen}(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos(x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)-2+2x}{-\operatorname{sen}(x)}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)-2+2x}{-\operatorname{sen}(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)-2+2x}{-\operatorname{sen}(x)}=\frac{0}{0}\overset{\text{L'Hôp.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-4\operatorname{sen}(2x)+2}{-\cos(x)}=-2$$

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)-x}{x-\operatorname{sen}(x)}=\frac{0}{0}\overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{tg}^2(x)-1}{1-\cos(x)}=\frac{0}{0}\overset{\text{L'Hôp}}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg}(x)(1+\operatorname{tg}^2(x))}{\operatorname{sen}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(x)(1+\operatorname{tg}^2(x))}{\cos(x)\operatorname{sen}(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+\operatorname{tg}^2(x)\right)}{\cos(x)}=2$$

Soluciones al ejercicio 1

e) $$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+x+4x^2}\right)=+\infty-\infty=IND \Longrightarrow$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-(1+x+4x^2)}{2x+\sqrt{1+x+4x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-x}{2x+\sqrt{1+x+4x^2}}=-\frac{1}{4}$$

f) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}-\frac{1}{x}\right)=+\infty-\infty=IND$$
$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}-\frac{1}{x}\right)=-\infty+\infty=IND$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg}(x)}{x\operatorname{tg}(x)}=\frac{0}{0}=IND \overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-(1+\operatorname{tg}^2(x))}{\operatorname{tg}(x)+x(1+\operatorname{tg}^2(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}^2(x)}{\operatorname{tg}(x)+x+x\operatorname{tg}^2(x)}=\frac{0}{0}$$
$$\overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{tg}(x)(1+\operatorname{tg}^2(x))}{1+\operatorname{tg}^2(x)+1+\operatorname{tg}^2(x)+x\,2\operatorname{tg}(x)(1+\operatorname{tg}^2(x))}=\frac{0}{2}=0$$

Soluciones al ejercicio 1

h) $$\lim_{x\to 1} x^{\frac{x}{\operatorname{sen}(\pi x)}} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} x^{\frac{x}{\operatorname{sen}(\pi x)}} = 1^{-\infty} = IND \\ \lim\limits_{x\to 1^-} x^{\frac{x}{\operatorname{sen}(\pi x)}} = 1^{+\infty} = IND \end{cases}$$

$$L = \lim_{x\to 1} x^{\frac{x}{\operatorname{sen}(\pi x)}} \Longrightarrow \ln(L) = \lim_{x\to 1} \frac{x}{\operatorname{sen}(\pi x)} \ln(x) = \frac{0}{0} \overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}$$

$$\ln(L) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)+1}{\pi\cos(\pi x)} = -\frac{1}{\pi} \Longrightarrow \ln(L) = -\frac{1}{\pi} \Longrightarrow L = e^{-\frac{1}{\pi}}$$

Ejercicio 2

a) *Calcula en función del parámetro α el límite*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)}$$

b) *Calcula m para que* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{\operatorname{sen}(2x)}=3.$

c) *Calcula b para que los siguientes límites sean números reales, y obtén dichos límites.*

I) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)+b\operatorname{sen}(x)}{x^3}$

II) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{b}{2x}\right)$

Solución al ejercicio 2

a) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} = 1 \implies$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{x+1} = 1^{+\infty} = IND \implies$$

$$\implies \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{\alpha x^2+4x+8}\right]^{\frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\alpha x^2 + 4x + 8}} = \begin{cases} e^{\frac{1}{4}} & si \quad \alpha = 0 \\ e^{0} = 1 & si \quad \alpha \neq 0 \end{cases}$$

b) $\forall\, m \in \mathbb{R}, \ \lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + mx)}{\operatorname{sen}(2x)} = \dfrac{0}{0} = IND \overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{m}{1+mx}}{2\cos(2x)} = \dfrac{m}{2}$

$$\frac{m}{2} = 3 \iff m = 6$$

Solución al ejercicio 2

c) I) Si $b = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

Si $b \neq 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos(x) + b\,\mathrm{sen}(x)}{x^3} = \dfrac{0}{0} = IND \overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x) + b\cos(x)}{3x^2} = \dfrac{1+b}{0^+} = \infty$ si $b \neq -1$

Necesariamente $b = -1$, por tanto:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(x) - \cos(x)}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\mathrm{sen}(x)}{3x} = \dfrac{0}{0} \overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\cos(x)}{3} = -\dfrac{1}{3}$

II) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{b}{2x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - be^x + b}{2xe^x - 2x} = \dfrac{0}{0} = IND \overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - be^x}{2e^x + 2xe^x - 2} = \dfrac{2-b}{0} = \infty$ si $b \neq 2$

Necesariamente $b = 2$, por tanto:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - 2e^x}{2e^x + 2xe^x - 2} = \dfrac{0}{0} \overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x}{2e^x + 2e^x - 2xe^x} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$