Repaso Bloque Análisis (II)

1.- a) $f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2+x} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x^2+x}{x^2-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ Posibles discontinuidades $x=-1$ $x=0$ $x=1$

Entonces analizamos la discontinuidad en cada punto (En el resto es continua)

$\underline{x=-1}$ $f(-1)$ no existe.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2-x}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{(x-1)x}{(x+1)x} = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2-x}{x^2+x} = \lim\limits_{-1^+} \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \underline{x=-1 \text{ discont. salto infinito}}$$

$\underline{x=1}$ $f(1)$ no existe

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+x}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+x}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \underline{x=1 \text{ discont. de salto infinito}}$$

$x=0$ $f(0)$ no existe

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-x}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{-1}{1} = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+x}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{1}{-1} = -1 \end{cases} \ \underline{x=0 \text{ discont. evitable}}$$

b) $g(x) = 7-|2x-3| = \begin{cases} 7-(-2x+3) & \text{si } x<3/2 \\ 7-(2x-3) & \text{si } x \geq 3/2 \end{cases} = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x<3/2 \\ 10-2x & \text{si } x\geq 3/2 \end{cases}$

Cada rama es continua en el intervalo que está definida, solo nos queda estudiar la continuidad en $x=3/2$

- $g(3/2) = 10-2\cdot\frac{3}{2} = 7$
- $\lim\limits_{x\to 3/2^-} 2x+4 = 7$, $\lim\limits_{x\to 3/2^+} 10-2x = 7$ $\Big\rangle \lim\limits_{x\to 3/2} f(x) = 7$ $\Big\} \Rightarrow x=3/2$ es continua.

Por tanto $g(x)$ no presenta discontinuidades

3.- Calculamos los ptos de corte entre la recta y la curva $1 = e^{1-x^2}$

$e^0 = e^{1-x^2}$ $\quad 0 = 1-x^2$

$x=1$ $x=-1$

Entonces los ptos $P_1(1, f(1)) = (1,1)$ $P_2 = (-1,1)$

$f(x) = e^{1-x^2}$ $f'(x) = -2x\cdot e^{1-x^2} \Rightarrow$ las pendientes $m_1 = f'(1) = -2$, $m_2 = f'(-1) = 2$

Por tanto las ecuaciones de las rectas tangentes.

$$y-y_0 = m(x-x_0) \Rightarrow \begin{cases} y-1 = -2(x-1) \\ y-1 = 2(x+1) \end{cases}$$

$$2.-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^{1-5x} \underset{1^{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2+x}{1+x}-1\right)^{1-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2+x-1-x}{1+x}\right)^{1-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+x}\right)^{1-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+x}\right)^{1+x\cdot\frac{1-5x}{1+x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1-5x}{1+x}}=\boxed{e^{-5}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)} \overset{\frac{\infty}{\infty(\infty-\infty)}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{\sqrt{x}\left(\cancel{x^2}-x^2-x-1\right)}=\cancel{\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+x^2+x}+\sqrt{}}{\sqrt{x}(-x-1)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+x^2+x}+\sqrt{(x+1)(x^2+x+1)}}{\sqrt{x}\,(-x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\cdot x}+\sqrt{x^2(x+1)}+\sqrt{x^3+x^2+x}+\sqrt{x^3+x^2+x+x^2+x+1}}{\sqrt{x}\,\cancel{(-x-1)^2}\cdot(-x)-\sqrt{x}\cdot 1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3+x^2+x}+\sqrt{x^3+2x^2+2x+1}}{-\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3/x^3}+\sqrt{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}}+\sqrt{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}+\sqrt{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}}{-\sqrt{x^3/x^3}-\sqrt{\frac{x}{x^3}}}=\boxed{-4}$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(x^3\cdot e^{1/x}\right)\overset{0\cdot\infty}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{1/x}}{x^{-3}}\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{1/x}\cdot(-1/x^2)}{-3x^{-4}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{1/x^2}}{3x^{-2}}\overset{\text{L'H}}{=}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^{-2}\cdot e^{1/x}}{-6x^{-3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{1/x}}{6x^{-1}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{1/x}\cdot -1/x^2}{-6x^{-2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{1/x}}{6}=\boxed{+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}e^{1/x}=0}$$

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{sen}x\,(1-\operatorname{sen}x)}{\cos^2x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{sen}x\,(1-\operatorname{sen}x)}{1-\operatorname{sen}^2x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{sen}x\,\cancel{(1-\operatorname{sen}x)}}{\cancel{(1-\operatorname{sen}x)}\,(1+\operatorname{sen}x)}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$A=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg}x}$ aplico logaritmos $LA=L\left(\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg}x}\right)=\lim_{x\to0}\left(L\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg}x}\right)=\lim_{x\to0}\left[\operatorname{tg}x\,(L1-Lx^2)\right]$

$$=\lim_{x\to0}\frac{0-2Lx}{\operatorname{cotg}x}=\lim_{x\to0}\frac{-2/x}{-1/\operatorname{sen}^2x}=\lim_{x\to0}\frac{2\operatorname{sen}^2x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\operatorname{sen}x\cos x}{1}=0\qquad LA=0\qquad\boxed{A=1}$$

4.- $f(x) = x + |1 - \ln x| = \begin{cases} x + 1 - \ln x & \text{si } 0 < x < e \\ x - 1 + \ln x & \text{si } x \geq e \end{cases}$

es una suma de derivables por tanto derivable en todos los puntos del dominio excepto quizá en $x = e$.

Veamos si es derivable en $x = e$ ¿ $f'(e^-) = f'(e^+)$? ¿ $f'_-(e) = f'_+(e)$?

$$f'(e^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(e+h) - f(e)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(e+h) + 1 - \ln(e+h) - e}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h + 1 - \ln(e+h)}{h} \overset{L'H}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{1 - \frac{1}{e+h}}{1} = [$$

$$f'(e^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(e+h) - f(e)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(e+h) - 1 + \ln(e+h) - e}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h - 1 + \ln(e+h)}{h} \overset{L'H}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{1 + \frac{1}{e+h}}{1} = [$$

Como $1 - \frac{1}{e} \neq 1 + \frac{1}{e}$ $f(x)$ no es derivable en $x = e$ (Aunque sí es continua en $x =$

La recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$

Como $2 < e$ $f(2) = 2 + 1 - \ln 2 = 3 - \ln 2$ Para $x < e$ $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ $f'(2) = \frac{1}{2}$

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \qquad y - (3 - \ln 2) = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + 2 - \ln 2}$$

5.- $f(x) = \dfrac{3x+1}{3 - \cos x}$ es una función continua en $[0, \pi]$ por ser cociente de continuas $3 - \cos x \neq$

$f(0) = \frac{1}{3 - \cos 0} = \frac{1}{2} < 2$

$f(\pi) = \frac{3\pi + 1}{4} > 2$

$\Big\}$ $\overset{\text{Th. valores intermedios (Darboux)}}{\Longrightarrow}$ $f(x)$ toma todos los valores comprendidos entre $1/2$ y $\frac{3\pi+1}{4}$ al menos una vez en el intervalo $(0, \pi)$

Vamos a ver que en un único pto. $f(x) = 2$

$$\frac{3x+1}{3 - \cos x} = 2 \Rightarrow 2(3 - \cos x) = 3x + 1$$

$2\cos x + 3x - 5 = 0$ única solución

Supongamos que $2\cos x + 3x - 5 = 0$ tiene 2 soluciones x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ definimos la función $g(x) = 2\cos x + 3x - 5$ continua en $[x_1, x_2]$ derivable en (x_1, x_2)

$g(x_1) = g(x_2)$ ya que en ambos $g(x) = 0$. Por tanto aplicamos Th. Rolle

$\exists c \in (x_1, x_2) \;/\; g'(c) = 0 \qquad g'(x) = -2\,\text{sen}\,x + 3 = 0 \Rightarrow -2\,\text{sen}\,x = -3$

$\text{sen}\,x = 3/2$ ¡Imposible!

Por tanto llegamos a una contradicción

Luego $\dfrac{3x+1}{3 - \cos x} = 2$ sólo tiene una solución.

6.- $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x-4) + 17$ es continua en $[0,4]$
es derivable en $(0,4)$ $\Big\}$ por ser producto de f. continuas y derivables $\Rightarrow$

$$f(0) = f(4) = 17$$

Th. Rolle

$\Longrightarrow \exists\, x_0 \in (0,4) \;/\; f'(x_0) = 0$ es decir $f'(x)$ posee al menos una raíz real en $(0,4)$

7.- $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \Rightarrow a+b+c+d = 0 \\ f'(0) = 2 \Rightarrow c = 2 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 3a+2b+c = 0 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 12a+4b+c = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a+b+d = -2 \\ 3a+2b = -2 \\ 12a+4b = -2 \end{array} \quad \begin{array}{r} -6a-4b = 4 \\ 12a+4b = -2 \\ \hline 6a = 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a = 1/3 \\ b = -3/2 \\ c = 2 \\ d = -5/6 \end{array} \right.$$

Vamos a ver si los extremos son máximos o mínimos:

$f''(x) = 6ax + 2b \quad f''(x) = 2x - 3 \qquad f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow x = 1$ máximo.

$f''(2) = 1 > 0 \Rightarrow x = 2$ mínimo.

8.- $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x t^2 \ln(1+4t^2)\, dt}{x^5} \overset{\text{teorema fundamental del cálculo I.}}{=} \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln(1+4x^2)}{5x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x^2)}{5x^2} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{8x}{1+4x^2}}{10x} = \lim_{x\to 0} \frac{8}{10(1+4x^2)} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

$$\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}\, dx =$$

$$\frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

$$x^2+5 = A(x^2-2x+1) + B(x^2-x) + Cx$$

$$x^2+5 = (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A \qquad \left.\begin{array}{l} A+B = 1 \\ -2A-B+C = 0 \\ A = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 5 \\ B = -4 \\ C = 6 \end{array}$$

$$\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}\, dx = \int \frac{5}{x}\, dx + \int \frac{-4}{(x-1)}\, dx + \int \frac{6}{(x-1)^2}\, dx$$

$$= 5 \ln|x| - 4 \ln|x-1| + 6 \cdot \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + C$$

- $\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{e^x}\,dx = \int e^{-x} \cdot \operatorname{sen} 3x\,dx = -e^{-x} \operatorname{sen} 3x - \int -e^{-x} \cos 3x \cdot 3\,dx = -e^{-x} \cdot \operatorname{sen} 3x + 3\int e^{-x} \cos 3x\,dx =$

$u = \operatorname{sen} 3x \Rightarrow du = \cos 3x \cdot 3\,dx$
$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$u = \cos 3x \Rightarrow du = -3\operatorname{sen} 3x$
$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$$= -e^{-x} \operatorname{sen} 3x + 3\left[-e^{-x} \cdot \cos 3x - \int e^{-x} \cdot 3 \operatorname{sen} 3x\,dx\right] = -e^{-x} \operatorname{sen} 3x - 3e^{-x} \cos 3x - \underline{9\int e^{-x} \operatorname{sen} 3x\,dx}$$

Por tanto paso al principio esa integral $10\int e^{-x} \operatorname{sen} 3x\,dx = -e^{-x} \operatorname{sen} 3x - 3e^{-x} \cos 3x$

$$\int e^{-x} \operatorname{sen} 3x\,dx = \frac{-e^{-x} \operatorname{sen} 3x - 3e^{-x} \cos 3x}{10}$$

- $\int \frac{\operatorname{sen} x}{5 - 2\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2 \operatorname{sen} x}{5 - 2\cos x}\,dx = \underline{\frac{1}{2} L_n(5 - \cos x) + C}$

- $\int \frac{3x - 8}{x(x^2+4)}\,dx \Rightarrow \frac{3x-8}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+4} = \frac{Ax^2 + 4A + Mx^2 + Nx}{x(x^2+4)} = \frac{(A+M)x^2 + Nx + 4A}{x(x^2+4)}$

$A + M = 0$
$N = 3$
$4A = -8$
$A = -2$

$$= \int \frac{-2}{x}\,dx + \int \frac{2x+3}{x^2+4} = -2\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= -2L_n|x| + L_n|x^2+4| + 3 \cdot I + C$$

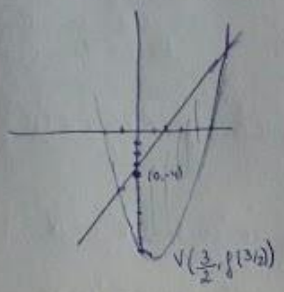
$$I = \int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\,dx = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}}\int \frac{1 \cdot 1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$$

- $\int x \cdot 7^{x^2}\,dx = \frac{1}{L_n 7 \cdot 2}\int (2x \cdot L_n 7)\, 7^{x^2}\,dx = \underline{\frac{1}{2 L_n x} \cdot 7^{x^2} + C}$ porque $y = 7^{x^2}$

$y' = 2x \cdot 7^{x^2} \cdot L_n 7$

· Área del recinto limitado por $y = x^2 - 3x - 10$ $y = 2x - 4$

· Puntos de corte $x^2 - 3x - 10 = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases}$

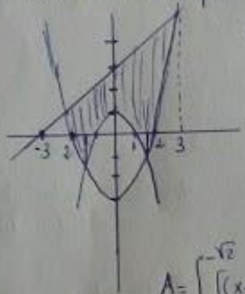


$$A = \int_{-1}^{6} \left[(2x-4) - (x^2-3x-10) \right] dx = \int_{-1}^{6} (-x^2+5x+6)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x \right]_{-1}^{6} = \left[\left(-\frac{256}{3} + \frac{180}{2} + 36 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 6 \right) \right] =$$

$$= 60 - \frac{1}{3} - \frac{5}{2} = \frac{343}{6}\ u^2$$

• Área limitada por $y = 1 - x^2$ $y = x^2 - 3$ $y = x + 3$



Puntos de corte entre las curvas:

$\left.\begin{array}{l} y = 1 - x^2 \\ y = x^2 - 3 \end{array}\right\}$ $1 - x^2 = x^2 - 3$ $2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ $x = \pm\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 3 \\ y = x + 3 \end{array}\right\}$ $x^2 - 3 = x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$ $\begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

$$A = \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \left[(x+3) - (x^2-3) \right] dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left((x+3) - (1-x^2) \right) dx + \int_{\sqrt{2}}^{3} \left[(x+3) - (x^2-3) \right] dx$$

$$= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} (-x^2+x+6)\, dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^2+x+2)\, dx + \int_{\sqrt{2}}^{3} (-x^2+x+6)\, dx =$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^{-\sqrt{2}} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} + \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{\sqrt{2}}^{3} = \quad u^2$$

• $f(x) = x \cdot e^{3x}$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$.

Ptos de corte $x = 0 \Rightarrow y = 0$ $(0,0)$
$y = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(-x) \neq f(x)$ no es simétrica

Asint. verticales no tiene.

Asint. horizontales $\lim_{x \to -\infty} (x \cdot e^{3x}) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-3x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-3e^{-3x}} = \frac{1}{-3e^{\infty}} = \frac{1}{-\infty} = 0$ $\boxed{y = 0}$

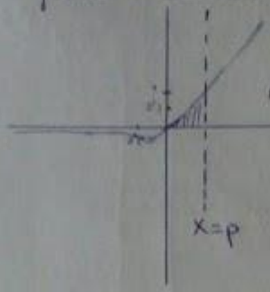
$f'(x) = e^{3x} + 3x \cdot e^{3x} = e^{3x}(1+3x)$ $f'(x) = 0$ $3x + 1 = 0$ $x = -1/3$

$f''(x) = 3e^{3x}(1+3x) + e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}(2+3x)$ $f''(-1/3) > 0 \Rightarrow x = -1/3$ hay un mínimo.

$f''(x) = 0$ $(3x+2) = 0$ $x = -2/3$ hay un punto de inflexión

$f'(x)>0 \Rightarrow 3x+1>0 \quad x>-1/3$ por tanto $(-1/3, +\infty)$ $f(x)$ crece

$(-\infty, -1/3)$ $f(x)$ decrece



$A=\frac{1}{9}$ $\qquad A=\int_0^p x\cdot e^{3x}dx$

$$\int x e^{3x}dx \underset{\uparrow}{=} x e^{3x}-\int \frac{e^{3x}}{3}dx = x\cdot e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{xe^{3x}}{3}-\frac{e^{3x}}{9}$$

$u=x \Rightarrow du=dx$

$dv=e^{3x}dx \Rightarrow v=\frac{e^{3x}}{3}$

Entonces: $\int_0^p x e^{3x}dx = \left[\frac{e^{3x}(3x-1)}{9}\right]_0^p = \frac{e^{3p}(3p-1)}{9}-\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9}$

$$\frac{e^{3p}(3p-1)}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$e^{3p}(3p-1)=0 \quad 3p-1=0 \quad p=\frac{1}{3}$$

- $f(x)$ será una primitiva de $f'(x)$ y además $f(0)=0$

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t(t+1)}dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{t}dt - \int\frac{1}{t+1}dt =$$

$e^x=t \Rightarrow e^x dx = dt \quad dx=\frac{dt}{t}$ $\qquad \frac{1}{t(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}=\frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)}=\frac{(A+B)t+A}{t(t+1)}$

$A+B=0 \Rightarrow B=-1$

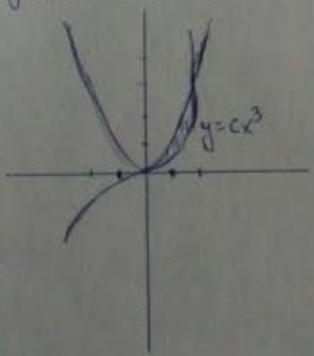
$A=1$

$$= \ln|t| - \ln|t+1| = \ln e^x - \ln(e^x+1) = x-\ln(e^x+1)+C$$

Pero $f(0)=0 \Rightarrow f(0)=0-\ln(1+1)+C=0 \quad C=\ln 2$ $\qquad \boxed{f(x)=x-\ln(1+e^x)+\ln 2}$

- $f(x)=x^2$

$g(x)=cx^3$ con $c>0$



$x^2=cx^3 \qquad \frac{cx^3}{x^2}=1 \quad cx=1 \quad x=\frac{1}{c}$

$$A=\int_0^{1/c}x^2dx-\int_0^{1/c}cx^3dx=\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/c}-\left[\frac{cx^4}{4}\right]_0^{1/c}$$

$$=\frac{1}{3c^3}-\frac{c}{4c^4}=\frac{1}{3c^3}-\frac{1}{4c^3}=\frac{1}{12c^3}$$

$$\frac{1}{12c^3}=\frac{2}{3} \qquad c^3=\frac{1}{8} \Rightarrow c=\frac{1}{2}$$