Ejercicios de geometría. Recta y plano. 2º Bachillerato

1. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$, pasa por P= (3, 0,-4) y es perpendicular al plano $2x+3y-z-5=0$. (Sol.: 11x-7y+z-29=0)

2. Dadas las rectas $r:\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}$; $s:\frac{x-1}{-2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{3}$, determina la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. (Sol.: 4x-7y-2z+13=0)

3. Halla a y b para que las rectas siguientes sean paralelas:

$$r:\begin{cases}2x+ay-z=1\\ 2x+3y+bz=3\end{cases};\quad s:4x=2y+6=z$$

(Sol. 1ª: a=1, b=-2; Sol. 2ª: a=3, b=-1)

4. Halla los valores del parámetro k para que los tres planos

$$\alpha: x+y+kz=1$$
$$\beta: kx+y+z=1$$
$$\gamma: 2x+y+z=k$$

tengan una recta en común. Halla también el vector de dirección de esa recta.
(Sol.: k=1; $\vec{u}$=(0,1,-1))

5. Determina el parámetro k para que la recta definida por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}\alpha: 3x+ky+k-1=0\\ \beta: 2x+6y-2z-6=0\end{array}\right\}$$ esté situada en el plano $\pi: x+y+z+1=0$

(No hay solución; para k=6, plano y recta son paralelos; para $k\neq 6$ son secantes)

6. Dados el plano $\pi: x+y+mz=n$ y la recta $r:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$

a) Calcula m y n para que π y r sean secantes.
b) Calcula m y n para que π y r sean paralelos.
c) Calcula m y n para que π contenga a r.

(Sol.: a) $m\neq 0$, para todo n ; b) m=0; $n\neq 2$; c) m=0; n=2)

7. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ Tales que $|\vec{u}|$=3, $|\vec{v}|$=5 y $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4$. Calcula:

a) $\vec{u}\cdot(3\vec{u}-2\vec{v})$ b) $(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot(2\vec{u}-3\vec{v})$
c) $(4\vec{u}+3\vec{v})\cdot(2\vec{u}-3\vec{v})$ d) $(3\vec{u}-\vec{v})^2$

(Sol: a) 35; b) -189; c) -129; d) 130)

8. Sean dos vectores perpendiculares $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}|=2$ y $|\vec{v}|=\frac{2}{3}$. Calcula el valor de $x\in\Re$ en los siguientes casos:

a) $(\vec{u}+x\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=-\frac{1}{2}$ b) $(x\vec{u}-\vec{v})^2=\frac{8}{9}$
c) $(2x\vec{u}+3\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})=0$ c) $(3\vec{u}-x\vec{v})\cdot(-x\vec{u}+9\vec{v})=16$

(Sol: a) 81/8; b) $x=\pm 1/3$; c) x=1/3; d) $x=-1$)

9. Halla el perímetro, superficie y los ángulos del triángulo cuyos vértices son A (2, 0, 1) B (2, 0, 2) y C (3,1,0).

(Sol: $P=1+\sqrt{3}+\sqrt{6}$; $A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha=125'26°; \beta=19'47°; \delta=35'27°$)

10. Halla la proyección de la recta $r\equiv\begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=1-t \end{cases}$ sobre el plano

$\pi\equiv 3x-y+2z-1=0$

(Sol: $\dfrac{x-2}{17}=\dfrac{y-3}{27}=\dfrac{z+1}{-12}$)

11. Halla la ecuación del plano perpendicular a $\alpha\equiv 2x+y+4z-1=0$ y a $\beta\equiv 3x-2y-z-1=0$ y que pasa por el punto P (1, 1, 1)

(Sol: $\pi:(x,y,z)=(1,1,1)+\lambda(2,1,4)+\mu(3,-2,-1)\Leftrightarrow\pi:x+2y-z-2=0$)

12. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta x=y=z; y es perpendicular al plano XY.

(Sol: $\pi:x-y=0$)

13. Dada la recta $r:\begin{cases} 3x-y+2z-6=0 \\ x+2y-z-2=0 \end{cases}$

a) Halla ecuación del plano que contiene a esa recta y al origen de coordenadas.
b) Halla la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo al plano $\pi:y-6z+1=0$
c) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano YZ.

(Sol: a) $\alpha:14y-10z=0$; b) No tiene solución pues la recta corta al plano π ; c) $\pi:-7y+5z=0$)

14. Escribe la ecuación de la recta que se apoya en r y s y pasa por (0, 0, 0), siendo

$r:\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+3t \\ z=1+4t \end{cases}$ $\qquad s:\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-2}$

(Sol: $r':\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 13x-10y+11z=0 \end{cases}$)