IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas II
28-02-2020. Tiempo estimado: 90 minutos

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1 *Dado el vector libre* $\overrightarrow{u} = (2, 0, -1)$:

a) $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \iff (2, 0, -1) \cdot (-1, 1, k) = 0 \iff -2 - k = 0 \iff k = -2$

b) $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1, 5, 2) \implies \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ *es una base de vectores ortogonales con orientación positiva.*

c) La base pedida es $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, *donde:*

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{|\overrightarrow{u}|}\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2}}(2, 0, -1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, -1) = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{|\overrightarrow{v}|}\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2}}(-1, 1, -2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, -2) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{|\overrightarrow{w}|}\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 5^2 + 2^2}}(1, 5, 2) = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, 5, 2) = \left(\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{\sqrt{30}}{15}\right)$$

Solución del ejercicio 2

$|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}| = 20 \iff (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = 400 \iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = 400 \iff$
$\iff 10^2 + 2 \cdot \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + (10 \cdot \sqrt{3})^2 = 400 \iff 2 \cdot \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 400 - 100 - 300 = 0 \iff \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

$$\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 90°$$

Solución del ejercicio 3

a) $\text{Área}\,\Delta\, ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{2}}{2}\,u^2 \iff |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}\,u^2$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & k-1 \end{vmatrix} = (-k+2, -1, -1) \implies$$

$$\implies |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-k+2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{k^2 - 4k + 6} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{k^2 - 4k + 6} = \sqrt{2} \iff k^2 - 4k + 6 = 2 \iff k^2 - 4k + 4 = 0 \iff (k-2)^2 = 0 \iff$$
$$\iff k = 2$$

b) $V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = 1\,u^3 \iff |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = 6\,u^3$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & k-1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 2(k-1) - 2 - 2 = 2k - 5$$

$$|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = 6 \iff |2k - 5| = 6 \iff 2k - 5 = \pm 6 \iff \begin{cases} k = \frac{11}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

c) *Podemos resolver el problema de dos formas:*

- *Calculamos k para que se anule el producto mixto* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$*:*

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0 \Longleftrightarrow 2k - 5 = 0 \Longleftrightarrow k = \frac{5}{2}$$

  Ahora buscamos el plano que pasa por A, B, y D. Cualquier $P = (x, y, z)$ *del plano buscado cumple que* $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 0$*. Es decir:*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow -x - 2y - 2z + 7 = 0$$

- *Otra forma es calcular primero el plano que pasa por A, B, y D. Obvimente obtendríamos* $x + 2y + 2z - 7 = 0$*.*

  Ahora se buscaría k para que C verificase la anterior ecuación:

$$0 + 2 \cdot 1 + 2k - 7 = 0 \implies k = \frac{5}{2}$$

Solución del ejercicio 4

a) *Un punto* $P = (x, y, z)$ *es de la recta si* $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$*.*

Es decir, $(x - 1, y + 2, z) = \lambda(-2, 5, 1)$

- *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- *Ecuación continua:*

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z}{1}$$

- *Ecuación implícita:*

$$\begin{cases} 5x + 2y - 1 = 0 \\ y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

b) *Determinamos dos puntos de la recta r a partir de las ecuaciones paramétricas de la recta:*

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 3x - 5z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x - 2y &= -1 - z \\ 3x &= 2 + 5z \end{cases} \overset{-3\cdot F_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} -3x + 6y &= 3 + 3z \\ 3x &= 2 + 5z \end{cases} \implies$$

$$\overset{F_1+F_2}{\Longrightarrow} 6y = 5 + 8z \implies y = \frac{8z+5}{6} \overset{z=\lambda}{\Longrightarrow} y = \frac{5+8\lambda}{6} \overset{x=\frac{2+5z}{3}}{\Longrightarrow} x = \frac{2+5\lambda}{3}$$

$$r : \begin{cases} x = \frac{2+5\lambda}{3} \\ y = \frac{8\lambda+5}{6} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Dando valores a λ*, por ejemplo* $\lambda = 0$ *y* $\lambda = 1$*, obtenemos dos puntos* $B = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 0\right)$ *y* $C = \left(\frac{7}{3}, \frac{13}{6}, 1\right)$*.*

Para cualquier punto $P=(x,y,z)$ del plano que contiene a A, B y C, se cumple que los vectores $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son coplanarios:

$$\overrightarrow{AP}=(x-2,y,z-1),\ \overrightarrow{AB}=\left(-\frac{4}{3},\frac{5}{6}-1\right),\ \overrightarrow{BC}=\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3},1\right)$$

Por comodidad, elegimos trabajar con los vectores $6\overrightarrow{AB}=(-8,5,-6)$ y $3\overrightarrow{BC}=(5,4,3)$, con lo cual, será nulo el producto mixto $(\overrightarrow{AP},6\overrightarrow{AB},3\overrightarrow{BC})$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -8 & 5 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}=0 \Longleftrightarrow 39(x-2)-6y-57(z-1)=0 \Longleftrightarrow 39x-6y-57z-21=0$$

Es decir:

$$13x-2y-19z-7=0$$

c) *Si la recta y el plano son perpendiculares, el vector director de la recta es el vector normal del plano. Por tanto, el vector normal del plano es $\overrightarrow{n}=(2,1,-1)$.*

Cualquier punto $P=(x,y,z)$ del plano verificará que $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$. Es decir

$$(x,y,z-1)\cdot(2,1,-1)=0 \Longleftrightarrow 2x+y-z+1=0$$

d) *Los vectores directores del plano son el vector director de la recta, $\overrightarrow{u}=(-1,2,0)$, y el vector $\overrightarrow{AB}=(1,1,-1)$*

Para cualquier punto $P=(x,y,z)$ del plano:

$$(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u})=0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Longleftrightarrow 2x+y+3z-3=0$$

e) *Primero determinamos la recta r perpendicular a π pasando por P. El vector director de dicha recta será el vector normal a π, $\overrightarrow{n}=(-1,3,-1)$:*

$$r:\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-\lambda \\ y & = & 2+3\lambda \\ z & = & 1-\lambda \end{array}\right.$$

Calculamos el punto $Q=P\cap\pi$:

$$Q=(1-\lambda,2+3\lambda,1-\lambda)\in\pi \Longleftrightarrow -(1-\lambda)+3(2+3\lambda)-(1-\lambda)+7=0 \Longleftrightarrow \lambda=-1$$

Por tanto $Q=(2,-1,2)$.

El punto simétrico de P respecto de π es el punto $P'=(x,y,z)$ que verifica

$$\overrightarrow{PP'}=2\overrightarrow{PQ}$$

Es decir: $(x-1,y-2,z-1)=2(1,-3,1) \Longleftrightarrow P'=(x,y,z)=(3,-4,3)$