IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas II
07-02-2020. Tiempo estimado: 90 minutos

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{1-x} & si \quad x \le 0 \\[2ex] \dfrac{2x^2}{1+x} & si \quad 0 < x \le 1 \\[2ex] 1 + \dfrac{1}{2}e^{-x^2+5x-4} & si \quad x > 1 \end{cases}$

- *Estudio en $x = 0$:*

$$\left.\begin{array}{l} \exists f(0) = 0 \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2}{1-x} = 0 \in \mathbb{R} \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2}{1+x} = 0 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2x^2}{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{1-x} = 0 \in \mathbb{R} \\[2ex] f'(0^+) = \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2x^2}{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{1+x} = 0 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Longrightarrow f \text{ derivable en } x = 0$$

- *Estudio en $x = 1$:*

$$\left.\begin{array}{l} \exists f(1) = 1 \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{1+x} = 1 \in \mathbb{R} \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 1^-} \left(1 + \frac{1}{2}e^{-x^2+5x-4}\right) = \frac{3}{2} \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) \ne \lim_{x\to 1^+} f(x) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f \text{ no es continua en } x = 1 \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x = 1$$

b) *Asíntotas verticales: No hay*

Asíntotas horizontales:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2}e^{-x^2+5x-4}\right) = 1 \in \mathbb{R} \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{1-x} = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow y = 1 \text{ es asíntota horizontal}$$

Asíntotas oblícuas: Solo se buscan cuando $x \to -\infty$

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x(1-x)} = -2 \in \mathbb{R} \\[2ex] n = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (-2x)) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x^2}{1-x} + 2x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{1-x} = -2 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \; y = -2x - 2 \text{ es asíntota oblícua}$$

Solución del ejercicio 2

La función $f(x) = \cos x - x$ es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, con $f(0) = 1 > 0$, y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$. Por tanto, por el Teorema de Bolzano, existe $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$.

Supongamos que existiese un $d \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $c < d$, en el que $f(c) = f(d)$. Tendríamos entonces que f es continua en $[c, d]$, derivable en (c, d), con $f(c) = f(d)$, y por el Teorema de Rolle, existiría un $\alpha \in (c, d) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

Pero $f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1 < 0 \quad \forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Por tanto, d no puede existir.

Es decir, la solución es única.

Solución del ejercicio 3

a) *Como la función es continua en $[1, 4]$, y derivable en $(1, 4)$, por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (o de Lagrange) existe $c \in (1, 4)$ tal que*

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(c)$$

Es decir, existe $c \in (1, 4)$ cumpliendo que $f'(c) = \dfrac{0 - 3}{4 - 1} = -1$.

Demostrada su existencia, resolvemos la ecuación $f'(c) = -1$:

$$2c - 6 = -1 \implies c = \frac{5}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente buscada es:

$$y - f\left(\frac{5}{2}\right) = -1 \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) \implies y + \frac{3}{4} = -\left(x - \frac{5}{2}\right) \implies y = -x + \frac{7}{4}$$

b) *En $x = 4$, $f'(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2$, por tanto, la pendiente de la recta normal a la parábola es $m = -\frac{1}{2}$, y la ecuación de dicha recta es $y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 4)$. O equivalentemente $2y + x = 4$.*

Los límites de integración vendrán determinados por los puntos de corte entre la recta y la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 8 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 2 \end{array}\right\} \implies x^2 - 6x + 8 = -\frac{1}{2}x + 2 \implies 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{4} = \frac{11 \pm 5}{4} = \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ x = \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

Dado que la parábola es convexa, la recta queda por encima de $y = f(x)$ en el intervalo $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$, por tanto, el área pedida es:

$$\int_{\frac{3}{2}}^{4} -\frac{1}{2}x + 2 - (x^2 - 6x + 8)\, dx = \int_{\frac{3}{2}}^{4} -x^2 + \frac{11}{2}x - 6\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{11}{4}x^2 - 6x\right]_{\frac{3}{2}}^{4} =$$

$$= -\frac{64}{3} + \frac{11}{4}4^2 - 24 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{11}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{125}{48}$$

Solución del ejercicio 4

$$\frac{x^4}{x^2-1} = x^2+1+\frac{1}{x^2-1} \implies \int \frac{x^4}{x^2-1}\,dx = \int x^2+1+\frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{x^3}{3}+x+\int \frac{dx}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \implies 1 = A(x+1)+B(x-1) \implies$$

$$\implies \begin{cases} x=1 \implies 1=2A \implies A=\frac{1}{2} \\ x=-1 \implies 1=-2B \implies B=-\frac{1}{2} \end{cases} \implies$$

$$\implies \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^4}{x^2-1}\,dx = \frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$$

Solución del ejercicio 5

a) *Hay que analizar los cambios de signo de f'':*

$$f''(x)=0 \iff (x^2-2x)e^x=0 \iff x(x-2)=0 \implies \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Por tanto:

Signo de $(x^2-2x)e^x$	$+$	$\boldsymbol{x=0}$	$-$	$\boldsymbol{x=2}$	$+$

- $f''>0 \quad \forall x \in (-\infty,0)\cup(2,+\infty) \implies f$ *convexa en* $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.
- $f''<0 \quad \forall x \in (0,2) \implies f$ *cóncava en* $(0,2)$.
- *Hay dos puntos de inflexión: en $x=0$ y en $x=2$.*

b) *La función f' es la primitiva de f'' que satisface $f'(0)=4$, por tanto, hay que resolver la integral indefinida* $\int (x^2-2x)e^x\,dx$.

Integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u=x^2-2x \implies du=(2x-2)\,dx \\ dv=e^x\,dx \implies v=e^x \end{array}\right\} \implies \int (x^2-2x)e^x\,dx =$$

$$= (x^2-2x)e^x - \int (2x-2)e^x\,dx = (x^2-2x)e^x - 2\int xe^x\,dx + 2\int e^x\,dx =$$

$$= (x^2-2x)e^x - 2\int xe^x\,dx + 2e^x = (x^2-2x+2)e^x - 2\int xe^x\,dx$$

Integrando $\int xe^x\,dx$*, nuevamente por partes:*

$$\left.\begin{array}{l} u=x \implies du=dx \\ dv=e^x\,dx \implies v=e^x \end{array}\right\} \implies \int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

Por tanto:

$$f'(x) = (x^2-2x+2)e^x - 2(xe^x - e^x + C) = (x^2-4x+4)e^x + C$$

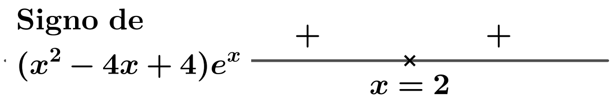
Para determinar el valor de C, utilizamos que $f'(0) = 4$. Por tanto:

$$(0^2 - 4 \cdot 0 + 4)e^0 + C = 4 \implies 4 + C = 4 \implies C = 0$$

Es decir, $f'(x) = (x^2 - 4x + 4)e^x$

Para estudiar la monotonía y la existencia de puntos extremos, hay que analizar el signo de f':

$$f'(x) = 0 \iff (x^2 - 4x + 4)e^x = 0 \iff x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x-2)^2 = 0 \iff x = 2$$



- *Como la función f es derivable en todo número real, si existen extremos relativos necesariamente la función f' se anulará en dichos puntos.*
  El único valor para el cual se anula f' es $x = 2$, pero en $x = 2$ la función f' no cambia de signo. Por tanto, se concluye que no existen extremos relativos.
- *Como $f' \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, entonces f es creciente en $\mathbb{R}$*

Solución del ejercicio 6

a) *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) una función continua. Entonces, la función $x \in [a,b] \longrightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable $\forall x \in (a,b)$, verificándose además que $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.*

b) *Como la función $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x+2}$ es continua en $[0,1]$, por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral (TFCI), la función $x \in [0,1] \longrightarrow F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ es derivable en $(0,1)$. Además, $F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$, por tanto:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^3} = \frac{0}{0} = IND \overset{L'Hôp.}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{F'(x)}{3x^2} \overset{TFCI}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\ln(x^2+1)}{x+2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+1)}{3x^2(x+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+1)}{3x^3+6x^2} = \frac{0}{0} = IND \overset{L'Hôp.}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{9x^2+12x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{3x(3x+4)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3(3x+4)(x^2+1)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$