IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas II
13-01-2020. Tiempo estimado: 45 minutos

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

a) *1º)* $A - X = AX \iff A = AX + IX \iff A = (A+I)X$

2º) La matriz $A+I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *es inversible, ya que* $|A+I| = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1-1) = -2 \neq 0$

Por tanto, $A = (A+I)X \iff (A+I)^{-1} \cdot A = X$

3º) $(A+I)^{-1} = \dfrac{1}{|A+I|}(Adj(A+I))^t = -\dfrac{1}{2}(Adj(A+I))^t$

$Adj(A+I) = (A_{ij})$:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Por tanto, $(Adj(A+I))^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4º) $X = (A+I)^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) *B real simétrica* $\Longrightarrow B = B^t \Longrightarrow B + B^t = 2B$. *Por tanto:*
$|(B+B^t)^3| = |B+B^t|^3 = |2B|^3 = (2^3|B|)^3 = 2^9|B|^3 = 512 \cdot (-1)^3 = -512$

c) $C^2 + C + I = 0 \Longrightarrow C + I = (-1)C^2$.

i) $|3C+3I| = |3(C+I)| = 3^3|C+I| = 27 \cdot |(-1)C^2| = 27 \cdot (-1)^3|C|^2 = -27 \cdot (-2)^2 = -108$

ii) $(C^t)^5 \cdot C^{-1} = |C^t|^5 \cdot |C^{-1}| = |C|^5 \cdot \dfrac{1}{|C|} = |C|^4 = (-2)^4 = 16$

III) $Adj(C) = |C|^{3-1} = (-2)^2 = 4$

d) $D^{-1} = D^t \Longleftrightarrow D \cdot D^t = D^t \cdot D = I \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & y & 0 \\ x & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & x & 0 \\ y & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + y^2 & \frac{-x+y}{2} & 0 \\ \frac{-x+y}{2} & \frac{1}{4} + x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} + y^2 = 1 \\ \frac{1}{4} + x^2 = 1 \\ \frac{-x+y}{2} = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ x^2 = \frac{3}{4} \\ y^2 = \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

Por tanto, el problema tiene dos soluciones:

- $x = y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $x = y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $X = 2I - E^t \cdot F \implies X = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies$

$$\implies X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución del ejercicio 2

a) *Sea la matriz del sistema* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{pmatrix}$*:*

$$|A| = m(m+3) + 2 - 3m + 2(m-1) = m^2 + 2m = m(m+2) \neq 0 \Longleftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$$

- *Por tanto, si* $m \neq 0$ *y* $m \neq -2$*, la matriz del sistema tiene el mismo rango que la matriz* $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 & m \end{pmatrix}$*, y dicho rango coincide también con el número de incógnitas del sistema.*
  Es decir, por el teorema de Rouché-Fröbenius, si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$*, el sistema es compatible determinado (tiene solución única).*
- *Si* $m = 0$*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \implies rango(A) = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies rango(A^*) = 2 \text{ ya que } F_1 = F_3$$

Por tanto, $rango(A) = rango(A^*) = 2 < 3$*, y por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).*

- *Si* $m = -2$*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow rango(A) = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow rango(A^*) = 3 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto, $rango(A) < rango(A^*)$*, y por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es incompatible (sin solución).*

b)

- *Si* $m = 0$*:*

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -2z = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = y - 3 \end{cases} \Longrightarrow \text{Solución: } (\lambda - 3, \lambda, 1)$$

- *Si* $m = 1$*:*

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ y - 2z = -2 \\ x + 4z = 1 \end{cases}$$

Si utilizamos la Regla de Cramer:

- $$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4+0+2-3-8-0}{4+0+2-3-0-0} = -\frac{5}{3}$$
- $$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8+0-2+6-0+2}{4+0+2-3-0-0} = -\frac{2}{3}$$
- $$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1+0+2-1-0-0}{4+0+2-3-0-0} = \frac{2}{3}$$

Por tanto, la solución es $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$