IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas I
22-11-2019. 2° Parcial. Tiempo estimado: 45 minutos

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1 *Dado que no puede sacarse factor común, no puede utilizarse ningún producto notable, y no hay raíces enteras (las únicas candidatas serían $x = 1$ y $x = -1$, y es inmediato comprobar que efectivamente no lo son), resolveremos el problema teniendo en cuenta que las raíces reales del polinomio $p(x)$ son las soluciones de la ecuación $3x^4 + 2x^2 - 1 = 0$:*

$$3x^4 + 2x^2 - 1 = 0 \overset{x^2=t}{\Longleftrightarrow} 3t^2 + 2t - 1 = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3} = \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = -1 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$t = \frac{1}{3} \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \textit{ son factores}$$

$$t = -1 \Longrightarrow x^2 = -1 \Longrightarrow x \not\in \mathbb{R} \Longrightarrow (x^2+1) \textit{ es factor}$$

Por tanto:

- *Las raíces reales de $p(x)$ son: $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$*
- *La factorización del polinomio es* $p(x) = 3\left(x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot(x^2+1)$, *o equivalentemente,* $p(x) = (\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)(x^2+1)$

Solución del ejercicio 2

a) $$\left(\frac{1}{x^3 - x} - \frac{x-1}{x^2+x}\right)\cdot\frac{3x+3}{x-2} = \left(\frac{1}{x(x-1)(x+1)} - \frac{x-1}{x(x+1)}\right)\cdot\frac{3(x+1)}{x-2} =$$

$$\left[\frac{1-(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}\right]\frac{3(x+1)}{x-2} = \left[\frac{2x-x^2}{x(x-1)(x+1)}\right]\frac{3(x+1)}{x-2} = \left[\frac{x(2-x)}{x(x-1)(x+1)}\right]\frac{3(x+1)}{x-2} =$$

$$\frac{3x(2-x)(x+1)}{x(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{3x(-1)(x-2)(x+1)}{x(x-1)(x+1)(x-2)} = -\frac{3}{x-1}$$

b) $$\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^4-1}\right) = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2-1)}\right) =$$

$$\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{x^2 - 1 + x^2}{(x^2+1)(x^2-1)}\right) = \left(\frac{2x^2-1}{2}\right) : \left(\frac{2x^2-1}{(x^2+1)(x^2-1)}\right) =$$

$$\frac{(2x^2-1)(x^2-1)(x^2+1)}{2(2x^2-1)} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{2}$$

Solución del ejercicio 3

a) $x^2(x+1) = 6x - 4 \Longleftrightarrow x^3 + x^2 - 6x + 4 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -6 & 4 \\ 1 & & 1 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & -4 & \underline{|0} \end{array}$$

Al no haber más raíces enteras, tenemos:

$$x^3 + x^2 - 6x + 4 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x^2+2x-4) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 + 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

Por tanto:

- $x - 1 = 0 \implies x_1 = 1$
- $x^2 + 2x - 4 = 0 \implies x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} \implies \begin{cases} x_2 = -1 + \sqrt{5} \\ x_3 = -1 - \sqrt{5} \end{cases}$

b) $8^x - 2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0 \implies (2^x)^3 - 2 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 6 = 0 \stackrel{t=2^x}{\implies} t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \underline{|0} \\ -2 & & -2 & 6 & \\ \hline & 1 & -3 & \underline{|0} & \end{array}$$

Por tanto:

$$t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0 \Longleftrightarrow (t-1)(t+2)(t-3) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \\ t = 3 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio:

- $t = 1 \implies 2^x = 1 \implies x_1 = 0$
- $t = -2 \implies 2^x = -2 \implies x \notin \mathbb{R}$
- $t = 3 \implies 2^x = 3 \implies x \log 2 = \log 3 \implies x_2 = \dfrac{\log 3}{\log 2}$

c) $\log_3(2x+5) + \log_3(2x-5) = 2\log_3 x + 1 \implies \log_3(2x+5)(2x-5) = \log_3 x^2 + \log_3 3 \implies$

$$\log_3(4x^2 - 25) = \log_3 3x^2 \implies 4x^2 - 25 = 3x^2 \implies x^2 = 25 \implies \begin{cases} x = -5 \\ x = 5 \end{cases}$$

Ahora hay que comprobar la validez de las soluciones obtenidas:

- *Si $x = -5$, en la ecuación del enunciado tendríamos que calcular logaritmos de números negativos. Por tanto, $x = -5$ no es válida.*

- *Si* $x = 5$, *al sustituir en ambos lados de la ecuación se obtiene* $\log_3 75$. *Por tanto,* $x = 5$ *es válida.*

d) $\sqrt{x+4} + \sqrt{1-x} = 3 \implies \sqrt{x+4} = 3 - \sqrt{1-x} \implies x + 4 = 9 + 1 - x - 6\sqrt{1-x}$

$$\implies 2x - 6 = -6\sqrt{1-x} \implies x - 3 = -3\sqrt{1-x} \implies x^2 - 6x + 9 = 9 \cdot (1-x)$$

$$\implies x^2 + 3x = 0 \implies x(x+3) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Ahora hay que comprobar la validez de las soluciones obtenidas:

- *Si* $x = 0$, $\sqrt{0+4} + \sqrt{0+1} = 2 + 1 = 3$, *por tanto* $x = 0$ *es válida.*
- *Si* $x = -3$, $\sqrt{-3+4} + \sqrt{1-(-3)} = 1 + 2 = 3$, *por tanto* $x = -3$ *es válida.*

Solución del ejercicio 4

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -2 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & 8 \\ x & + & 4y & + & 2z & = & -5 \end{array}\right. \xrightarrow[-F_1+F_3\to F_3]{F_1+F_2\to F_2} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -2 \\ & & 3y & - & 2z & = & 6 \\ & & 3y & + & z & = & -3 \end{array}\right. \xrightarrow{-F_2+F_3\to F_3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -2 \\ & & 3y & - & 2z & = & 6 \\ & & & & 3z & = & -9 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{ll} \text{En } F_3: & 3z = -9 \implies z = -3 \\ \text{En } F_2: & 3y - 2z = 6 \stackrel{z=-3}{\implies} y = 0 \\ \text{En } F_1: & x + y + z = -2 \stackrel{z=-3,\, y=0}{\implies} x = 1 \end{array}\right.$$

Por tanto, la solución es $(1, 0, -3)$

Solución del ejercicio 5

1*)* $x + y = 2 \implies y = 2 - x$

2*)* $x^2 + y^2 - xy = 7 \stackrel{y=2-x}{\implies} x^2 + (2-x)^2 - x(2-x) = 7 \implies x^2 + x^2 - 4x + 4 - 2x + x^2 = 7 \implies$

$$3x^2 - 6x - 3 = 0 \implies x^2 - 2x - 1 = 0 \implies x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

3*)* $$\left.\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{2} \stackrel{y=2-x}{\implies} y = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \stackrel{y=2-x}{\implies} y = 1 + \sqrt{2} \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} \textit{Soluciones:} \\ (1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}),\ y\ (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}) \end{array}$$

Solución del ejercicio 6

x: Nº de alumnos que tienen Biología.
y: Nº de alumnos que tienen Tecnología.
z: Nº de alumnos que tienen Dibujo Técnico.

- *"Los que tienen Biología representan el* 60 % *del total":* $x = 0.6 \cdot (x + y + z)$
- *"Si tres alumnos de Dibujo se hubiesen matriculado en Tecnología, las dos asignaturas tendrían el mismo número de estudiantes":* $y + 3 = z - 3$
- *"El doble de la diferencia del número de matriculados en Biología y en Dibujo es el triple de la diferencia de los matriculados en Dibujo y en Tecnología":* $2(x - z) = 3(z - y)$

Por tanto, tenemos $\begin{cases} x = 0.6(x + y + z) \\ y + 3 = z - 3 \\ 2(x - z) = 3(z - y) \end{cases}$, *o análogamente* $\begin{cases} 0.4x - 0.6y - 0.6z = 0 \\ y - z = -6 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \end{cases}$