IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas I
Fecha: 25-10-2019. Tiempo estimado: 60 minutos

ALUMNO/A:

Solución del ejercicio 1

a) $\dfrac{30\sqrt{3}(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{10} - \left(3+8-4\sqrt{6}\right) = 3\sqrt{3}(2\sqrt{3}+\sqrt{2}) - 11 + 4\sqrt{6} =$
$18 + 3\sqrt{6} - 11 + 4\sqrt{6} = 7 + 7\sqrt{6}$

b) $\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}} - \sqrt[3]{\sqrt{3^3}} = \dfrac{10}{3}\sqrt{\dfrac{1\cdot 3}{3\cdot 3}} - \sqrt[6]{3^3} = \dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\sqrt{3} - \sqrt{3} = \left(\dfrac{10}{9} - 1\right)\sqrt{3} = \dfrac{1}{9}\sqrt{3}$

Solución del ejercicio 2

a) $\log(0.001) - \dfrac{1}{3}\log(BC^2) = \log(0.001) - \dfrac{1}{3}(\log\, B + 2\log\, C) =$

$= -3 - \dfrac{1}{3}(0.75 + 2\cdot 0.15) = -3 - 0.25 - 0.10 = -3.35$

b) $\log_C(B^2) = 2\log_C(B) = 2\cdot\dfrac{\log\, B}{\log\, C} = 2\cdot\dfrac{0.75}{0.15} = 2\cdot 5 = 10$

Solución del ejercicio 3

1º) $|x+1| = 0 \Longleftrightarrow x+1=0 \Longleftrightarrow x=-1$
2º)Como un valor absoluto siempre es mayor o igual que cero, la solución entonces es $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$*, o equivalentemente* $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Solución del ejercicio 4

a) $z_1 + \overline{z_1} = 2\,Re(z_1) = -2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}_{180^\circ}$

b) $z_1 - \overline{z_1} = i\,2\,Im(z_1) = i\,2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}_{90^\circ}$

c) $z_2^{-1} = \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)i} = -\dfrac{2}{i} = -\dfrac{2i}{i\cdot i} = 2i = 2_{90^\circ}$

d) $z_1\cdot z_2 = (-\sqrt{2}+i\sqrt{2})\left(-\dfrac{1}{2}\right)i = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1_{45^\circ}$

Solución del ejercicio 5

a) $-\sqrt{2}+i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}_{120^\circ} \implies (-\sqrt{2}+i\sqrt{6})^5 = (2\sqrt{2})^5_{600^\circ} = 128\sqrt{2}_{240^\circ} \implies$
$\implies 128\sqrt{2}(\cos 240^\circ + i\ \mathrm{sen}\, 240^\circ) = -64\sqrt{2} - i\,64\sqrt{6}$

b) $(2-i\sqrt{5})(3+i\,2\sqrt{5}) = 6 + i\,4\sqrt{5} - i\,3\sqrt{5} + 10 = 16 + i\sqrt{5}$

c) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{i^5\,(1+i)^2} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{i\,(1+i)^2} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{i\cdot 2i} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{-2} = -\dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

También sale rápido trabajando en forma polar:

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{i^5\,(1+i)^2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{i\,(1+i)^2} = \frac{2_{60^\circ}}{1_{90^\circ}\cdot(\sqrt{2}_{45^\circ})^2} = \frac{2_{60^\circ}}{1_{90^\circ}\cdot 2_{90^\circ}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{-2} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Solución del ejercicio 6

$$iz^4 = 8(1-i)z \Longleftrightarrow iz^4 - 8(1-i)z = 0 \Longleftrightarrow z(iz^3 - 8(1-i)) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ iz^3 - 8(1-i) = 0 \end{cases}$$

Resolvemos $\quad iz^3 - 8(1-i) = 0$:

$$iz^3 - 8(1-i) = 0 \Longleftrightarrow z^3 = \frac{8(1-i)}{i} \Longleftrightarrow z^3 = -i\,8(1-i) = -8 - 8\,i = 8\sqrt{2}_{225^\circ}$$

Las raíces cúbicas del complejo $8\sqrt{2}_{225^\circ}$ *son los números*

$$w_k = \sqrt[3]{8\sqrt{2}}_{\frac{225^\circ+360^\circ\,k}{3}} = 2\sqrt[6]{2}_{75^\circ+120^\circ k} \Longrightarrow \begin{cases} w_0 = 2\sqrt[6]{2}_{75^\circ} \\ w_1 = 2\sqrt[6]{2}_{195^\circ} \\ w_2 = 2\sqrt[6]{2}_{315^\circ} \end{cases}$$

Por tanto, las raíces de la ecuación son los cuatro números complejos:

$$z_0 = 0,\ w_0 = 2\sqrt[5]{2}_{75^\circ},\ w_1 = 2\sqrt[5]{2}_{195^\circ},\ w_2 = 2\sqrt[5]{2}_{315^\circ}$$

Solución del ejercicio 7

a) *Los afijos* $A = (3,1)$, B, C *y* D *de las raíces cuartas de un número complejo forman los cuatro vértices de un cuadrado centrado en el origen de coordenadas.*

Cada vértice del cuadrado resulta de aplicar al vértice anterior un giro de 90° *con respecto al origen. Esto equivale a multiplicar el número complejo correspondiente al afijo por el complejo* $1_{90^\circ} = i$.

Por tanto, si $w_0 = 3 + i$ *entonces:*

$$\begin{array}{l} w_1 = i\cdot w_0 = -1 + 3\,i \implies B = (-1,3) \\ w_2 = i\cdot w_1 = -3 - i \implies C = (-3,-1) \\ w_3 = i\cdot w_2 = 1 - 3\,i \implies D = (1,-3) \end{array}$$

b) *El lado del cuadrado,* l, *es la distancia entre dos vértices consecutivos (basta elegir dos afijos cuyos complejos no resulten números opuestos). Por tanto:*

$$l = d(A,B) = |w_0 - w_1| = |3 + i - (-1+3i)| = |4 - 2i| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}u$$

Es decir:

$$\textit{Perímetro} = 4l = 8\sqrt{5}\,u$$

$$\textit{Área} = l^2 = (4\sqrt{5})^2 = 20\,u^2$$

Solución del ejercicio 8

$\{z \in \mathbb{C} \quad / \quad |z| \le 2\}$