Proyecto MaTEX

Variables Aleatorias

Fco Javier González Ortiz

Directorio

8 de Junio de 2004

Versión 1

MaTEX

VARIABLES ALEATORIAS

Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Tabla de Contenido

Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

1. Variable Aleatoria Discreta

Definición 1.1 *Una variable aleatoria discreta X es una función que asigna valores numéricos a los sucesos elementales de un espacio muestral*

$$\begin{array}{cccccc} X & : & \Omega & \longrightarrow & R \\ & & \omega_i & \longrightarrow & x_i \end{array}$$

Ejemplo 1.1. Lanzamos dos monedas y definimos la variable aleatoria X, número de caras obtenidas. Siendo C obtener cara y X obtener cruz, como el espacio muestral es $\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$ entonces se tiene

$$\begin{array}{ccccc} X & : & \Omega & \longrightarrow & R \\ & & CC & \hookrightarrow & 2 \\ & & CX & \hookrightarrow & 1 \\ & & XC & \hookrightarrow & 1 \\ & & XX & \hookrightarrow & 0 \end{array}$$

Ejemplo 1.2. Lanzamos una moneda, si sacamos cara C recibimos 1 euro y si sacamos cruz X pagamos 1 euro. ¿ Cómo es la variable aleatoria X que mide la ganancia?.
El espacio muestral es $\Omega = \{C, X\}$ entonces se tiene

$$\begin{array}{ccccc} X & : & \Omega & \longrightarrow & R \\ & & C & \hookrightarrow & 1 \\ & & X & \hookrightarrow & -1 \end{array}$$

1.1. Función de Probabilidad

Definición 1.2 *Es la aplicación que asigna a cada valor de la variable aleatoria discreta X la probabilidad de que la variable tome dicho valor*

$$\begin{array}{rcccc} p_x & : & X & \longrightarrow & [0,1] \\ & & x_i & \longrightarrow & P(X=x_i) \end{array}$$

Ejemplo 1.3. Lanzamos dos monedas y definimos la variable aleatoria X, número de caras obtenidas. Siendo C obtener cara y X obtener cruz. La función de probabilidad de X es

$$\begin{aligned} p_x(2) = \quad & P(X=2) = \quad P(\text{“}CC''\,) = \frac{1}{4} \\ p_x(1) = \quad & P(X=1) = \quad P(\text{“}CX, XC''\,) = \frac{2}{4} \\ p_x(0) = \quad & P(X=0) = \quad P(\text{“}XX''\,) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Es habitual expresar la función de probabilidad en una tabla de la forma

x_i	0	1	2
$p_x(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Observa que se tiene que cumplir

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_x(x_i) = 1} \tag{1}$$

Ejemplo 1.4. Lanzamos una moneda, si sacamos cara C recibimos 1 euro y si sacamos crus X pagamos 1 euro. Describir la función de probabilidad de la variable aleatoria X que mide la ganancia.

x_i	1	-1
$p_x(x_i)$	$1/2$	$1/2$

Ejemplo 1.5. La función de probabilidad de la variable aleatoria X viene dada por la tabla.

x_i	-2	-1	0	1	2
$p_x(x_i)$	0.08	0.32	0.05	a	0.32

Hallar el valor de a, $P(X = 1)$, $P(X \geq 1)$ y $P(X \leq -1)$.

Solución:

- Como $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_x(x_i) = 1 \Rightarrow 0.08 + 0.32 + 0.05 + a + 0.32 = 1;\ \boxed{a = 0.23}$
- $P(X = 1) = p_x(1) = a = \boxed{0.23}$
- $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0.23 + 0.32 = \boxed{0.55}$
- $P(X \leq -1) = P(X = -2) + P(X = -1) = 0.08 + 0.32 = \boxed{0.4}$

□

1.2. Función de Distribución

Definición 1.3 *Es la aplicación $F_X(x_i)$ que asigna a cada valor x_i de la variable aleatoria discreta X la probabilidad de que la variable tome valores menores o iguales que x_i*

$$\boxed{F_X(x_i) = P(X \leq x_i)} \tag{2}$$

Ejemplo 1.6. La función de probabilidad de la variable aleatoria X viene dada por la tabla.

x_i	0	1	2	3
$p_x(x_i)$	0.1	0.2	0.4	0.3

Hallar la función de distribución de X.

Solución: De la definición (1.3) se tiene

$$\begin{array}{l}
F_X(0) = P(X \leq 0) = p_x(0) = 0.1 \\
F_X(1) = P(X \leq 1) = p_x(0) + p_x(1) = 0.3 \\
F_X(2) = P(X \leq 2) = p_x(0) + p_x(1) + p_x(2) = 0.7 \\
F_X(3) = P(X \leq 1) = p_x(0) + p_x(1) + p_x(2) + p_x(3) = 1
\end{array}$$

x_i	0	1	2	3
$F_x(x_i)$	0.1	0.3	0.7	1

□

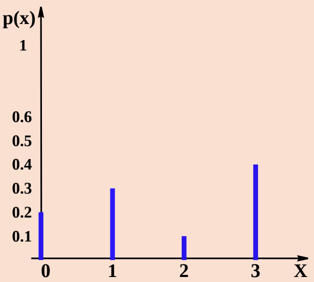
Ejemplo 1.7. La función de probabilidad de la variable aleatoria X viene dada por la tabla.

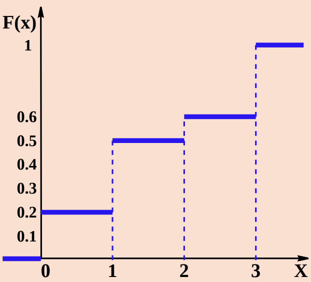
x_i	0	1	2	3
$p_x(x_i)$	0.2	0.3	0.1	0.5

Representar la función de probabilidad y la función de distribución de X

Solución: Juntamos en una tabla la función de probabilidad y la función de distribución de X

x_i	0	1	2	3
$p_x(x_i)$	0.2	0.3	0.1	0.4
$F_X(x_i)$	0.2	0.5	0.6	1





□

1.3. Media o esperanza de una variable aleatoria

Definición 1.4 *Se llama media o esperanza de una variable aleatoria X y se representa por μ al valor*

$$\mu = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \cdots x_n \cdot p(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i) \tag{3}$$

Ejemplo 1.8. Lanzamos dos monedas. Si salen dos caras recibimos 3 euros, si sale una cara recibimos 1 euro y si no sale ninguna cara pagamos 5 euros.¿Cuál es la ganancia media del juego?

Solución: Hallamos la función de probabilidad de la ganancia X en euros:

x_i	3	1	-5
$p_x(x_i)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

La ganancia media del juego es la media o esperanza de X

$$\begin{aligned} \mu =& x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + x_3 \cdot p(x_3) \\ =& 3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot \frac{1}{4} = \boxed{0} \end{aligned}$$

$\square$

Cuando en un juego la ganancia esperada $\mu = 0$ se llama juego justo. Si $\mu > 0$ es un juego con ventaja y si $\mu < 0$ es un juego en desventaja.

Ejemplo 1.9. Hallar la media de la variable aleatoria X, dada por la función de probabilidad.

x_i	0	1	2	3
$p_x(x_i)$	0.1	0.2	0.4	0.3

Solución: De la definición (1.4) se tiene

$$\begin{aligned}\mu =& x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + x_3 \cdot p(x_3) + x_4 \cdot p(x_4) \\ =& 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.3 = \boxed{1.9}\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 1.10. Hallar la media de la variable aleatoria X, dada por la función de probabilidad.

x_i	0	1	2	3
$p_x(x_i)$	0.3	0.2	0.1	0.4

Solución: De la definición (1.4) se tiene

$$\begin{aligned}\mu =& x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + x_3 \cdot p(x_3) + x_4 \cdot p(x_4) \\ =& 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.4 = \boxed{1.6}\end{aligned}$$

$\square$

1.4. Varianza y desviación típica de una variable aleatoria

Definición 1.5 *Se llama varianza de una variable aleatoria X y se representa por σ^2 al valor*

$$\boxed{\sigma^2 = x_1^2 \cdot p(x_1) + x_2^2 \cdot p(x_2) + \cdots x_n^2 \cdot p(x_n) - \mu^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p(x_i) - \mu^2} \quad (4)$$

A partir de la varianza se define la desviación típica σ como la raíz cuadrada de la varianza.

Ejemplo 1.11. Hallar la varianza y la desviación típica de la variable aleatoria X, dada por la función de probabilidad.

x_i	0	1	2	3
$p_x(x_i)$	0.1	0.2	0.4	0.3

Solución: Primero se calcula la media μ

$$\mu = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.3 = \boxed{1.9}$$

De la definición (1.5) se tiene

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= x_1^2 \cdot p(x_1) + x_2^2 \cdot p(x_2) + \cdots x_n^2 \cdot p(x_n) - \mu^2 \\ &= 0^2 \cdot 0.1 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.4 + 3^2 \cdot 0.3 - 1.9^2 = \boxed{0.89} \\ \sigma &= \sqrt{0.89} = \boxed{0.94} \end{aligned}$$

□

1.5. Ejercicios

Ejercicio 1. La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X es.

x_i	0	1	2	3	4
$p_x(x_i)$	0.1	a	b	c	0.2

Sabiendo que $P(X \leq 2) = 0.75$ y que $P(X \geq 2) = 0.75$, halla su esperanza matemática y su desviación típica.

Ejercicio 2. Una persona en un juego recibe 15 cts cuando saca una sota o un caballo y recibe 5 cts si saca un rey o un as de una baraja española de 40 cartas. Si saca cualquier otra carta paga 4 cts . ¿Cuál es la ganancia esperada en este juego?

Ejercicio 3. Se tienen tres urnas: la A que contiene dos bolas negras y cuatro rojas, la B tres negras y tres rojas; y la C con una negra y cinco rojas.

$$U_A = \{2\,N; 4\,R\} \qquad U_B = \{3\,N; 3\,R\} \qquad U_C = \{1\,N; 5\,R\}$$

Se elige una urna al azar y se extrae una bola de ella. Si se saca roja se reciben 3 euros y si se saca negra no se recibe nada. ¿Cuál es la ganancia esperada?

2. La Distribución Binomial

• Experiencias binomiales

Toda experiencia aleatoria que presenta dos resultados posibles, uno que fijamos como "éxito" y lo contrario como "fracaso" se suele denominar de tipo Bernouilli.

Por ejemplo las siguientes experiencias son de tipo Bernouilli:

- Jugar a cara o cruz.
- El nacimiento de un niño (varón o mujer)
- Obtener un "4" en el lanzamiento de un dado.
- Obtener un número "par" en el lanzamiento de un dado.
- Obtener "copas" al extraer una carta de la baraja española.
- La fabricación de una pieza en un factoría (aceptable o defectuosa).
- El resultado de una operación (éxito o fracaso).
- El lanzamiento a una canasta (encestar o fallar).
- Aprobar o suspender un examen.

Cuando se realizan n pruebas independientes de tipo Bernouilli decimos que es una experiencia aleatoria de tipo Binomial.

Por ejemplo las siguientes experiencias son de tipo Binomial:

- Jugar 10 veces a cara o cruz .
- Observar 30 nacimientos de un bebé (niña o niño)
- Obtener el "4" en el lanzamiento de 15 dados.
- Obtener "copas" al extraer una carta 8 veces de la baraja española.
- La fabricación de 1000 piezas en un factoría (aceptable o defectuosa).
- El resultado de 50 operaciones (éxito o fracaso).
- El lanzamiento a una canasta n veces (encestar o fallar).

- **Números combinatorios**

Lanzamos una moneda 5 veces. Sea el suceso $C =$“sacar cara” como “éxito”,y el suceso contrario X como “fracaso”.

☞¿ De cuántas formas se puede presentar el suceso “sacar dos caras”?

Es como colocar dos C en 5 casillas. La primera C dispone de 5 sitios, luego la segunda dispone de 4 sitios. Eso haría $5 \cdot 4 = 20$ posibilidades. Pero como las caras C son indistinguibles dividimos por 2. Eso hace $\dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$. en efecto

$$\left.\begin{array}{ll} CCXXX & XCXCX \\ CXCXX & XCXXC \\ CXXCX & XXCCX \\ CXXXC & XXCXC \\ XCCXX & XXXCC \end{array}\right\} \frac{5\cdot 4}{2} = \binom{5}{2} = 10$$

El número combinatorio $\dbinom{5}{2}$ se lee 5 sobre 2 y se calcula de la forma siguiente:

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

Las formas de obtener 3 caras en los cinco lanzamientos corresponde de forma a análoga a

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Las formas de obtener 4 caras en seis lanzamientos de una moneda sería

$$\binom{6}{4} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 15$$

Las formas de aparecer 5 defectuosas en 40 piezas fabricadas sería

$$\binom{40}{5} = \frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 658008$$

En general las formas de obtener k éxitos en n intentos corresponde a

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \qquad (5)}$$

Para extender la fórmula anterior se toma $0! = 1$.

Ejercicio 4. Calcula los siguientes número combinatorios

$$a)\ \binom{4}{1} \qquad b)\ \binom{6}{2} \qquad c)\ \binom{8}{3} \qquad d)\ \binom{10}{2}$$

$$e)\ \binom{5}{0} \qquad f)\ \binom{7}{3} \qquad g)\ \binom{9}{4} \qquad h)\ \binom{13}{2}$$

Ejemplo 2.1. En el lanzamiento de un dado Considera como "éxito" el suceso $E =$"sacar un 4" y como fracaso el suceso contrario F con $p = P(E) = \dfrac{1}{6}$ y $q = P(F) = \dfrac{5}{6}$. Queremos hallar la probabilidad de obtener un éxito en tres dados. Esto puede ocurrir como se muestra en la tabla

Dado 1	Dado 2	Dado 3	Probabilidad
E	F	F	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = p\,q^2$
F	E	F	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = p\,q^2$
F	F	E	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = p\,q^2$
			$3\,p\,q^2$

Como hay $\binom{3}{1}$ formas distintas,la probabilidad de obtener un éxito en tres intentos es:

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} p\,q^2$$

Si generalizamos el ejemplo anterior obtenemos la distribución bimomial.

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
VARIABLES ALEATORIAS
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

2.1. Distribución Binomial

Definición 2.1 *Una variable aleatoria X se llama binomial si su valor en igual al número de éxitos que ocurren en n pruebas* independientes,*teniendo todas ellas* la misma *probabilidad de éxito, que designamos por p. Su función de probabilidad es*

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}\,p^k\,(1-p)^{n-k},\ \ para\ k=0,1,\ldots,n;} \tag{6}$$

Si una variable X sigue la distribución binomial de parámetros n y p suele designarse como

$$X \sim B(n;p)$$

Las constantes n y p son los *parámetros* de la distribución; obviamente, $n>0$ es un número entero y $0 \leq p \leq 1$. La probabilidad de obtener fracaso es $1-p$ y se designa con al letra q de forma que $p+q=1$.

El cálculo de la media , la varianza y la desviación típica es algo laborioso y resulta

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mu & = & n\cdot p \\ \sigma^2 & = & n\cdot p\cdot q \\ \sigma & = & \sqrt{n\cdot p\cdot q} \end{array}} \tag{7}$$

Ejemplo 2.2. Tiramos una moneda 6 veces y contamos el número de caras X. Hallar la función de probabilidad y representarla.

Solución: Se tiene que

$$X \text{ es } B(n = 6; p = 1/2)$$

$$P(X=0) = \binom{6}{0}\, p^0\, q^6 = 0.0156$$

$$P(X=1) = \binom{6}{1}\, p^1\, q^5 = 0.0938$$

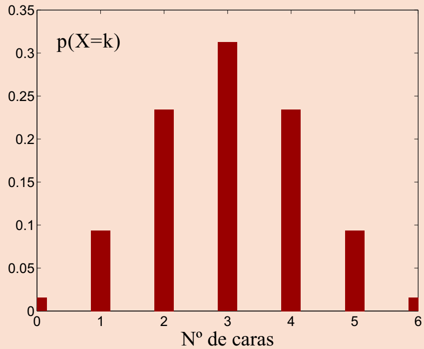
$$P(X=2) = \binom{6}{2}\, p^2\, q^4 = 0.2344$$

$$P(X=3) = \binom{6}{3}\, p^3\, q^3 = 0.3125$$

$$P(X=4) = \binom{6}{4}\, p^4\, q^2 = 0.2344$$

$$P(X=5) = \binom{6}{5}\, p^5\, q^1 = 0.0938$$

$$P(X=6) = \binom{6}{6}\, p^6\, q^0 = 0.0156$$



$$\mu = np = 10\,\frac{1}{2} = 5$$

$$\sigma^2 = npq = 10\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = 2.5$$

$\square$

Ejemplo 2.3. Se extraen cinco bolas con reemplazamiento de una urna que tiene 6 bolas blancas y 8 negras. ¿Qué es mas probable, sacar 2 rojas o 3 rojas?.

Solución: Sea éxito sacar roja, con $p = 6/14$,

Se tiene que

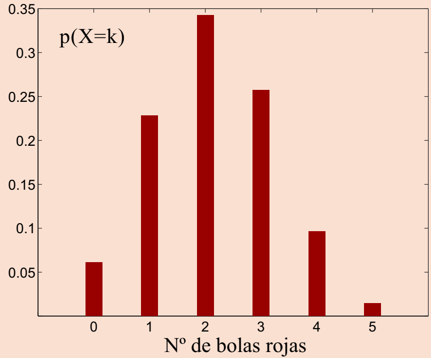
$$X \text{ es } B(n = 5; p = \frac{6}{14})$$

Probabilidad de sacar 2 bolas rojas:

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{6}{14}\right)^2 \left(\frac{8}{14}\right)^3 = 0.3427$$

Probabilidad de sacar 3 bolas rojas:

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{6}{14}\right)^3 \left(\frac{8}{14}\right)^2 = 0.2570$$



Es más probable obtener 2 rojas. □

Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

2.2. Ejercicios

Ejercicio 5. La probabilidad de que cierto jugador de baloncesto enceste una canasta de 3 puntos es 0.3. ¿Cuál es la probabilidad de que enceste, exactamente dos canastas de cinco lanzamientos?

Ejercicio 6. La probabilidad de que un estudiante que ingresa en la Universidad se licencie en 5 años es de 0.4. Se eligen al azar 10 estudiantes. Calcular la probabilidad de que:

a) ninguno se licencie en 5 años.

b) todos se licencien en 5 años.

c) un único estudiante se licencie en 5 años.

Ejercicio 7. Una máquina produce 12 piezas defectuosas de cada mil que fabrica. Hallar la probabilidad de que al examinar 40 piezas::

a) sólo haya una defectuosa.

b) no haya ninguna defectuosa.

Ejercicio 8. En un grupo de 20 estudiantes de un instituto se ha comprobado que cada alumno falta a clase el 4% de los días. Calcular la probabilidad de que en un día determinado:

a) no se registre ninguna falta.

b) falten a clase menos de tres estudiantes.

c) falte a clase un único estudiante.

Ejercicio 9. En una determinada ciudad, la probabilidad del nacimiento de una niña es del 56%. Seleccionamos una familia de cinco hijos. Calcular la probabilidad de que

a) tenga exactamente tres niñas.

b) tenga al menos dos niñas.

c) ¿cuál es el número medio de hijas en las familias con cinco hijos?

Ejercicio 10. A una fiesta han sido invitadas 8 personas. Cada persona puede acudir o no con independencia de que lo hagan las demás. Si la probabilidad de que acuda cada una es 0.85, calcular:

a) la probabilidad de asistan todas.

b) la probabilidad de asistan más de 6 personas.

c) la probabilidad de asista al menos la mitad.

Ejercicio 11. Si el 20% de las piezas producidas por una máquina son defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que entre cuatro piezas elegidas al azar, a lo sumo 2 sean defectuosas?

Ejercicio 12. La probabilidad de que un esquiador debutante se caiga en la pista es 0,4. Si lo intenta 5 veces, calcula la probabilidad de que se caiga al menos 3 veces.

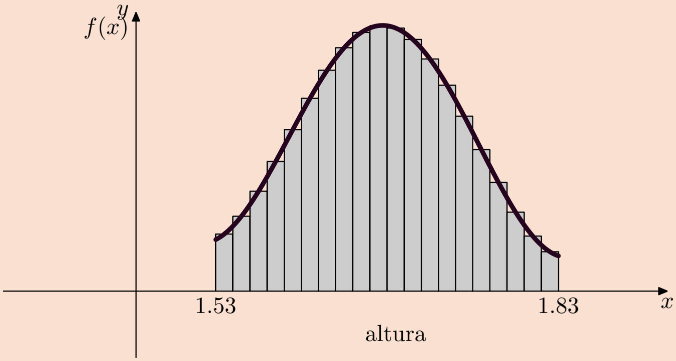
MaTEX
Variables Aleatorias
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

3. Variable Aleatoria Continua

Diremos que una variable aleatoria es continua cuando puede tomar cualquier valor en un intervalo. Por ejemplo, el peso o la altura de una persona. Para concretar, consideremos que representamos en un histograma las medida de la alturas X de los chicos de 15 años. Si tomamos más y más observaciones y haciendo clases cada vez más finas, el histograma tenderá a una curva que describirá el comportamiento de la variable estudiada, como muestra la figura.

Eso hace pensar en una función matemática $f(x)$ que modelice la frecuencia relativa de la altura para la población de los chicos de 15 años.

A dicha función $f(x)$ se le llama función de densidad.



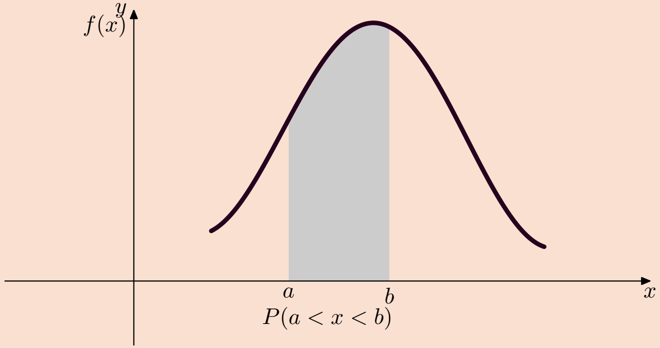
Definición 3.1 *Una variable aleatoria X se dice que es continua cuando tiene asociada una función de densidad $f(x)$ que cumple*

1. $f(x) \geq 0$ *para todos los valores donde está definida.*
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. *(El área bajo la curva es uno)*

La probabilidad se determina con

$$\boxed{P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx} \qquad (8)$$

que corresponde al área de la región limitada por $f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$



3.1. Función de Distribución

Definición 3.2 *Es la aplicación $F_X(x)$ que asigna a cada valor x de la variable aleatoria continua X la probabilidad de que la variable tome valores menores o iguales que x*

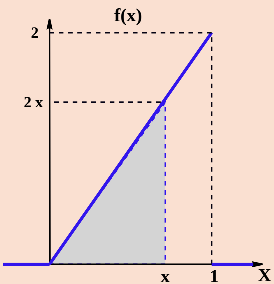
$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x)} \tag{9}$$

Ejemplo 3.1. Hallar la función de distribución de la variable aleatoria continua X que tiene por función de densidad.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Solución: De la definición (9) se tiene

$$\begin{aligned} F(x) =& P(X \leq x) = \int_0^x 2x\,dx \\ =& \text{área del triángulo gris} = \frac{x \cdot 2x}{2} = x^2 \\ & \boxed{F(x) = x^2} \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$



□

Ejemplo 3.2. La variable aleatoria X del ejemplo anterior tiene como función de distribución

$$F(x) = x^2 \qquad 0 < x < 1$$

Hallar las siguientes probabilidades:

a) $P(x < 0.5)$ *b*) $P(x < 0.2)$ *c*) $P(0.2 < x < 0.5)$

d) $P(x > 0.5)$ *e*) $P(x > 0.2)$ *f*) $P(0.1 < x < 0.8)$

Solución:

a) $P(x < 0.5) = F(0.5) = 0.5^2 = 0.25$

b) $P(x < 0.2) = F(0.2) = 0.2^2 = 0.04$

c) $P(0.2 < x < 0.5) = F(0.5) - F(0.2) = 0.25 - 0.04 = 0.21$

d) $P(x > 0.5) = 1 - F(0.5) = 1 - 0.25 = 0.75$

e) $P(x > 0.2) = 1 - F(0.2) = 1 - 0.04 = 0.96$

f) $P(0.1 < x < 0.8) = F(0.8) - F(0.1) = 0.64 - 0.01 = 0.63$

$\square$

Para hallar $P(a < x \leq b)$ utilizamos la expresión:

$$\boxed{P(a < x \leq b) = F_X(b) - F_X(a)} \qquad (10)$$

4. La Distribución Normal

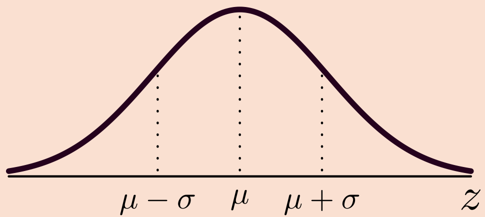
La función de distribución normal juega un papel central en la estadística ya que, además de sus interesantes propiedades de reproductividad y de aproximación de otras distribuciones, sirve para modelizar una gran cantidad de situaciones prácticas.

Definición 4.1 Distribución Normal. *Una variable aleatoria X se dice que tiene una distribución de probabilidades normal con media μ y varianza σ^2 y se denomina $N(\mu, \sigma^2)$ si su función de densidad es de la forma:*

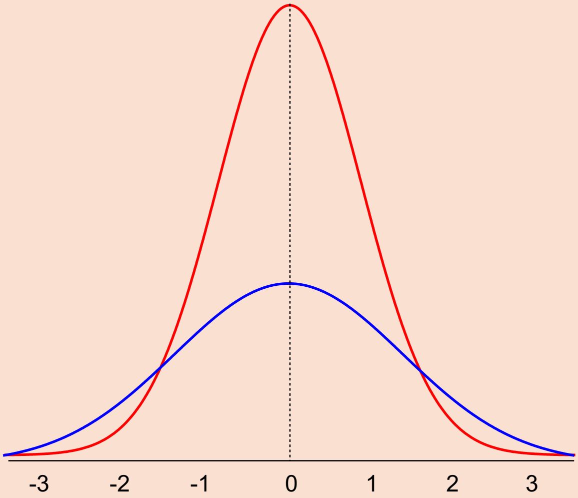
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

La media y varianza de una variable normal coinciden con los parámetros μ y σ^2 de la misma.

En la figura se muestra la función de densidad y se aprecia que es simétrica respecto de $x = \mu$ y los puntos de inflexión de la función de densidad se encuentran a una distancia σ de la media.



En la figura se muestran dos distribuciones normales, con media $\mu = 0$ y desviaciones típicas $\sigma = 1$ y $\sigma = 0.5$. Como las dos tienen la misma media $\mu = 0$, la función roja es mas alargada pues tiene menos variabilidad que la azul.



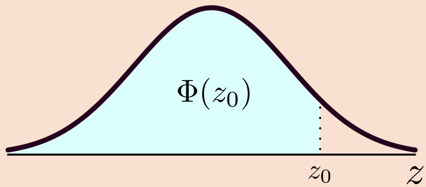
4.1. La normal $N(0;1)$

Primero estudiaremos la normal típica, que tiene media $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$, $N(0;1)$ y se designa con la letra **z**.

Para calcular las probabilidades

$$P(Z \leq z_0) = \Phi(z_0)$$

se diseña una tabla que proporciona las respectivas probabilidades.



- **Manejo de la tabla**

A partir de este momento cuando necesites calcular probabilidades con la normal $N(0;1)$, pulsa en el icono de la derecha

Tabla N(0,1)

y luego regresas al lugar donde estabas con el icono de la derecha

Volver

Ahora vas a aprender a a manejar la tabla $N(0;1)$.

Caso I $P(Z \leq z_0)$ y z_0 es positivo.

Para calcular $P(Z \leq 1.25) = \Phi(1.25)$, procedemos de la siguiente forma. Buscamos en la tabla de la $N(0;1)$ el valor 1.25. En la primera columna de la tabla se busca el valor 1.2 y en esta fila nos desplazamos hasta la columna con cabecera 0.05, obteniendo el valor 0.8944.

Caso II $P(Z \leq -z_0)$ y $-z_0$ es negativo.

Se utiliza por simetría la siguiente propiedad

$$P(Z \leq -z_0) = \Phi(-z_0) = 1 - \Phi(z_0)$$

Para calcular $P(Z \leq -1.34) = 1 - \Phi(1.34)$, procedemos de la misma forma. Buscamos en la tabla de la $N(0;1)$ el valor 1.34. En la primera columna de la tabla se busca el valor 1.3 y en esta fila nos desplazamos hasta la columna con cabecera 0.04, obteniendo el valor 0.9099. Luego

$$P(Z \leq -1.34) = 1 - \Phi(1.34) = 1 - 0.9099 = 0,0901$$

Caso III $P(z_0 \leq Z \leq z_1)$

Se calcula $\Phi(z_1)$ y $\Phi(z_0)$ y se restan, por la fórmula

$$P(z_0 \leq Z \leq z_1) = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$$

Así por ejemplo

$$P(1.25 \leq Z \leq 1.34) = \Phi(1.34) - \Phi(1.25) = 0.9099 - 0.8944 = 0,0155$$

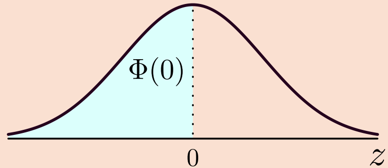
Ejemplo 4.1. Si z es normal $N_z(0;1)$ hallar:

$$P(z \leq 0) \qquad P(z \leq 1) \qquad P(z \leq 2)$$

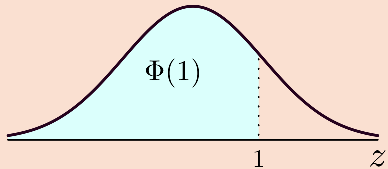
Solución:

Utiliza la Tabla N(0,1)

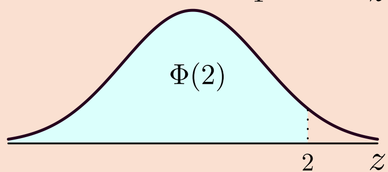
$$P(z \leq 0) = \Phi(0) = 0.5$$



$$P(z \leq 1) = \Phi(1) = 0.8413$$



$$P(z \leq 2) = \Phi(2) = 0.97725$$



$\square$

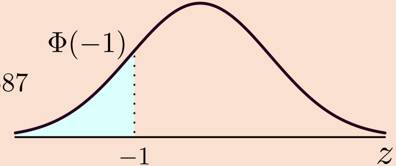
Ejemplo 4.2. Si z es normal $N_z(0;1)$ hallar:

$$P(z \leq -1) \qquad P(z > 1) \qquad P(z > 2)$$

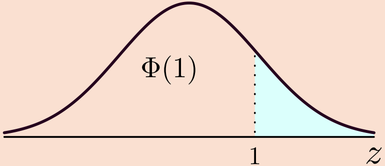
Solución:

Utiliza la Tabla N(0,1)

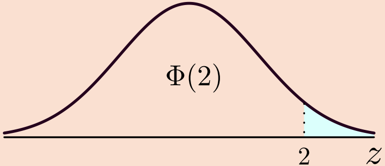
$P(z \leq -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.1587$



$P(z > 1) = 1 - \Phi(1) = 0.1587$



$P(z > 2) = 1 - \Phi(2) = 0.02275$



$\square$

Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

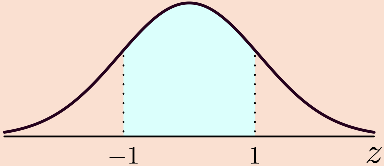
Ejemplo 4.3. Si z es normal $N_z(0;1)$ hallar:

$$P(-1 < z < 1) \qquad P(0 < z < 2) \qquad P(1 < z < 2)$$

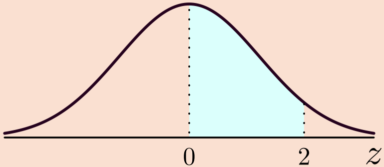
Solución:

Utiliza la Tabla N(0,1)

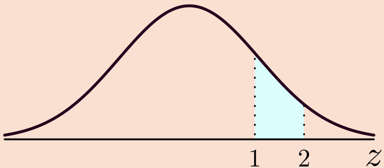
$$\begin{aligned} P(-1 < z < 1) =& \Phi(1) - \Phi(-1) \\ =& 2\,\Phi(1) - 1 \\ =& 0,6826 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(0 < z < 2) =& \Phi(2) - \Phi(0) = \\ =& 0.97725 - 0.5 \\ =& 0,47725 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(1 < z < 2) =& \Phi(2) - \Phi(1) \\ =& 0,13595 \end{aligned}$$



□

☞ Ahora vas a manejar la tabla en forma inversa. Nos dan la probabilidad y calculamos el valor de la variable z_0 que acumula dicha probabilidad.

Ejemplo 4.4. Hallar z_0 de la normal $N_z(0;1)$ en cada caso:

$$P(z < z_0) = 0.7019 \qquad P(z < z_1) = 0.8997 \qquad P(z < z_2) = 0.9625$$

Solución:

Utiliza la Tabla N(0,1)

- $\Phi(z_0) = 0.7019$, se busca en la parte central de la tabla normal $N_z(0;1)$ la probabilidad 0.7019, observando su fila 0.5 y su columna 0.03, luego

$$\Phi(z_0) = 0.7019 \Longrightarrow z_0 = 0.53$$

- $\Phi(z_1) = 0.8997$, se busca en la parte central de la tabla normal $N_z(0;1)$ la probabilidad 0.8997, observando su fila 1.2 y su columna 0.08, luego

$$\Phi(z_1) = 0.8997 \Longrightarrow z_1 = 1.28$$

- $\Phi(z_2) = 0.9625$, se busca en la parte central de la tabla normal $N_z(0;1)$ la probabilidad 0.9625, observando su fila 1.7 y su columna 0.08, luego

$$\Phi(z_2) = 0.9625 \Longrightarrow z_2 = 1.78$$

□

- **Tipificar una variable normal**

Cuando tenemos una variable normal $N(\mu;\sigma)$, para calcular las probabilidades se efectúa un cambio de variable que la convierte en una del tipo $N(0;1)$:

$$X \sim N(\mu;\sigma) \Longrightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0;1)$$

A esta variable se la llama normalizada o tipificada. De esta forma, sólo es necesario disponer de la tabla correspondiente a la $N(0,1)$ para realizar un cálculo dado, ya que

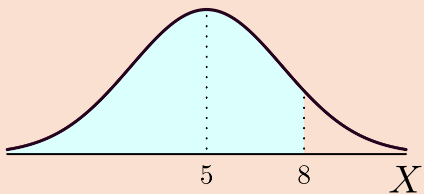
$$P_X(X \leq x_0) = P_Z\left(Z \leq \frac{x_0-\mu}{\sigma}\right).$$

Ejemplo 4.5. Si X es normal $N(5;2)$ hallar $P(X<8)$.

Solución:

Tipificamos

$$\begin{aligned} P(X<8) =& P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{8-5}{2}\right) \\ =& P(z<1.5) = \Phi(1.5) \\ =& 0.9332 \end{aligned}$$



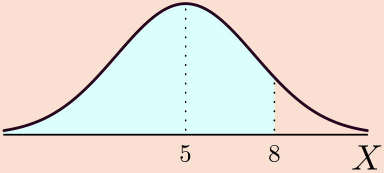
□

Ejemplo 4.6. Si X es normal $N(5;2)$ hallar: **Utiliza la** **Tabla N(0,1)**

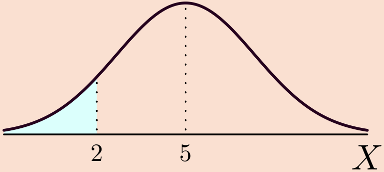
$$P(X<8) \qquad P(X<2) \qquad P(2<X<8)$$

Solución:

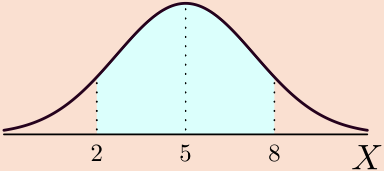
$$\begin{aligned} P(X<8) =& P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{8-5}{2}\right) \\ =& P(z<1.5) = \Phi(1.5) \\ =& 0.9332 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(X<2) =& P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{2-5}{2}\right) \\ =& P(z<-1.5) \\ =& 1-\Phi(1.5) = 0.0668 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(2<X<8) =& P\left(\frac{2-5}{2} < z < \frac{8-5}{2}\right) \\ =& P(-1.5<z<1.5) \\ =& \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) \\ =& 0.8664 \end{aligned}$$



$\square$

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
VARIABLES ALEATORIAS
Tabla N(0,1)
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 13. En una distribución normal $N(18; 4)$, hallar las siguientes probabilidades:

$a)$ $P(x < 18)$
$b)$ $P(x < 20)$
$c)$ $P(x > 16,5)$
$d)$ $P(x < 11)$
$e)$ $P(19 < x < 23)$
$f)$ $P(11 < x < 25)$

Utiliza la **Tabla N(0,1)**

Ejercicio 14. En la distribución normal $N_z(0; 1)$, hallar el valor de z_0 en cada caso

$a)$ $P(z < z_0) = 0.50$
$b)$ $P(z < z_0) = 0.8729$
$c)$ $P(z < z_0) = 0.3300$
$d)$ $P(z > z_0) = 0.9015$
$e)$ $P(z < z_0) = 0.9971$
$f)$ $P(z > z_0) = 0.1190$

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
VARIABLES ALEATORIAS
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 4.7. Si la estatura X de 500 estudiantes es normal de media 172 cm y desviación típica 5 cm, hallar el número de estudiantes con estatura

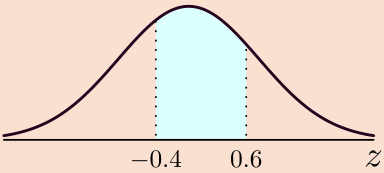
$a)$ entre 170 y 175 cm $\qquad$ $b)$ mayor de 180 cm

Solución:
Por comodidad, tipificamos los valores que vamos a usar

$$z_1 = \frac{170 - 172}{5} = -0.4 \quad z_2 = \frac{175 - 172}{5} = 0.6 \quad z_3 = \frac{180 - 172}{5} = 1.6$$

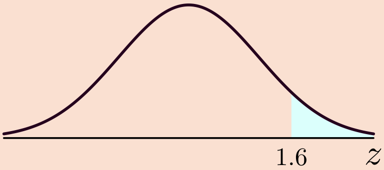
$$\begin{aligned} P(170 < X < 175) =& P\left(-0.4 < z < 0.6\right) \\ =& \Phi(0.6) - \Phi(-0.4) \\ =& 0.3811 \end{aligned}$$

$$N = 500 \times 0.3811 \approx 190 \text{ estudiantes}$$



$$\begin{aligned} P(X > 180) =& P\left(z > 1.6\right) \\ =& 1 - \Phi(1.6) \\ =& 0.0548 \end{aligned}$$

$$N = 500 \times 0.0548 \approx 27 \text{ estudiantes}$$



$\square$

4.2. Ejercicios

Ejercicio 15. La temperatura T durante el mes de mayo está distribuida de forma normal con media 21^o y desviación típica 4^o. Hallar el número de días esperados en que haya una temperatura entre 19^o y 23^o.

Ejercicio 16. El tiempo en días de duración de los focos producidos por una empresa, es una variable normal de media 780 y desviación típica de 40 días. Calcúlese el porcentaje de focos con una duración superior a 800 días.

Ejercicio 17. Los pesos de los individuos de una población se distribuyen normalmente con media 70 kg y desviación típica 5 kg. Calcular:

a) La probabilidad de que el peso de un individuo esté comprendido entre 65 y 80 kg.

b) La probabilidad de que un individuo pese más de 100 kg.

Ejercicio 18. En una panadería se cortan panecillos con un peso que se ajusta a una variable normal de media 100 g y desviación típica 9 g. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un panecillo cuyo peso oscile entre 80 g y la media?

Ejercicio 19. La distribución de la duración de un embarazo en mujeres es aproximadamente normal con media 266 días y desviación típica 16 días. Calcular:

a) La probabilidad de que un embarazo dure más de 242 días.

b) El 20% de los embarazos duran menos de ¿cuántos días?

c) El 50% de los embarazos duran menos de ¿cuántos días?

Ejercicio 20. Una empresa instala en una ciudad 20.000 bombillas. La duración de una bombilla sigue una distribución normal con media 302 días y desviación típica 40 días. Calcular:

a) ¿Cuántas bombillas se espera que se fundan antes de 365 días?

b) ¿Cuántas bombillas durarán más de 400 días?

Ejercicio 21. Una compañía de autobuses conoce que el retraso en la llegada sigue una ley normal con media 5 minutos, y que el 68.26% de los autobuses llega con un retraso comprendido entre los 2 y los 8 minutos:

a) ¿Cuál es la desviación típica?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un autobús llegue antes de la hora?.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un autobús se retrase de más de 10 minutos?.

Ejercicio 22. Cierto tipo de batería dura un promedio de 3 años, con una desviación típica de 0,5 años. Suponiendo que la duración de las baterías es una variable normal:

a) ¿Qué porcentaje de baterías se espera que duren entre 2 y 4 años?.

b) Si una batería lleva funcionando 3 años, ¿ cuál es la probabilidad de que dure menos de 4,5 años?

Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 23. En un examen de matemáticas, en el que se ha evaluado de 0 a 20 puntos, el 67% de los alumnos ha obtenido una puntuación igual o menor que 12,2 y el 9% ha obtenido puntuación superior a 16,7. Suponiendo que la distribución de las puntuaciones sea normal, calcular su media y su desviación típica.

Ejercicio 24. Un estudio de un fabricante de televisores indica que la duración media de un televisor es de 10 años, con una desviación típica de 0,7 años. Suponiendo que la duración media de los televisores sigue una distribución normal,

a) Calcula la probabilidad de que un televisor dure más de 9 años.

b) Calcula la probabilidad de que dure entre 9 y 11

5. Aproximación de la distribución binomial por la normal

Supongamos que X en una variable aleatoria con distribución de probabilidad binomial $B(n,p)$ y que el parámetro n tiende a infinito mientras que el parámetro p permanece constante. Entonces, puede demostrarse que la *función de distribución*[1] de la variable aleatoria

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{11}$$

tiende a la *función de distribución* normal estándar. Esto justifica que, si $np > 5$ y $np(1-p) > 5$, se use la aproximación

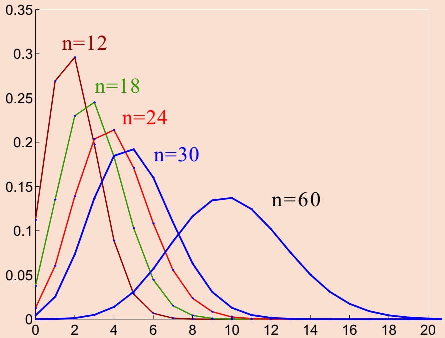
$$F_X(x) \simeq \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right), \text{ para } x = 0, 1, \ldots, n. \tag{12}$$

La aproximación (12) puede mejorarse con la llamada corrección por continuidad, de forma que

$$F_X(x) \simeq \Phi\left(\frac{x - np + 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right), \text{ para } x = 0, 1, \ldots, n. \tag{13}$$

[1] Debe notarse que la función de probabilidad binomial *no* tiende a la función de densidad normal estándar.

El gráfico muestra como se aproxima la binomial a la normal, a medida que n aumenta



Ejemplo 5.1. Sea X binomial $B\left(100; \dfrac{1}{2}\right)$ que tiene de media $\mu = np = 50$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}} = 5$. Si aproximamos por una normal $N(50; 5)$, se tiene

- Con la Binomial el valor exacto es $P(X \leq 55) = \boxed{0.8644}$
- Con la aproximación por la normal el valor es

$$P(X \leq 55) = P\left(z \leq \frac{55.5 - 50}{5}\right) = \Phi\,(1.1) = \boxed{0.8643}$$

Ejemplo 5.2. Aproximando con una distribución normal, calcular la probabilidad de que al lanzar una moneda 100 veces, el número de caras obtenido esté comprendido entre 46 y 55.

$$
\begin{aligned}
P(46 \leq X \leq 55) =& P\left(\frac{45.5-50}{5} < z < \frac{55.5-50}{5}\right) \\
=& \Phi\left(1.1\right) - \Phi\left(-1.1\right) = \boxed{0.7287}
\end{aligned}
$$

Utiliza la Tabla

Ejemplo 5.3. El 90% de los miembros de un club pasan sus vacaciones en la playa. Calcular aproximando con una distribución normal, la probabilidad de que en un grupo de 60 miembros del club, 50 o menos vayan a la playa en sus vacaciones .

$$
X \sim B(60; 0.9) \Rightarrow \mu = n\,p = 60{\cdot}0.9 = 54 \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{60\cdot 0.9\cdot 0.1} = 2,32
$$

$$
P(X \leq 50) = P\left(z < \frac{50.5-54}{2.32}\right) = \Phi\left(-1,51\right) = 1 - \Phi(1.51) = \boxed{0.0655}
$$

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
Variables Aleatorias
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

5.1. Ejercicios

Ejercicio 25. Se lanza una moneda 200 veces. Hallar la probabilidad de

a) Obtener a lo más 95 caras

b) Obtener más de 110 caras

Ejercicio 26. En cierto país la probabilidad de que nazca una niña es 0.58. Si se producen en un año 1000 nacimientos, ¿cuál es la probabilidad de que el número de niñas nacidas esté comprendido entre 501 y 550?

Ejercicio 27. El 4 % de las reservas de un vuelo no son utilizadas. Según esta observación, una compañia de aviación vende 150 billetes para 140 plazas. ¿ Cuál es la probabilidad de que todos los pasajeros consigan plaza?

Ejercicio 28. Un concesionario de automóviles vende a particulares vehículos de la misma marca. Sabiendo que la probabilidad de que este tipo de vehículos esté en servicio dos años después es de 0.8, determinar la probabilidad de que de 4000 automóviles vendidos, más de 3120 estén en servicio dentro de dos años.

Ejercicio 29. Se lanza un dado 600 veces. Hallar la probabilidad de

a) Obtener a lo más 95 –seises–

b) Obtener más de 110 –seises–

Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Test. Responde a las cuestiones:

1. Sea $X \equiv B(100; 0.5)$ entonces su media es:

(a) $\mu = 100$ (b) $\mu = 50$ (c) otro

2. Sea $X \equiv B(100; 0.5)$ entonces su varianza es:

(a) $\sigma^2 = 100$ (b) $\sigma^2 = 25$ (c) otro

3. Sea X es una variable aleatoria discreta el significado de $F_X(a)$ es :

(a) $P(X > a)$ (b) $P(X < a)$ (c) $P(X \leq a)$

4. Sea X es una variable aleatoria continua el significado de $F_X(a)$ es :

(a) $P(X < a)$ (b) $P(X \leq a)$ (c) las dos

5. Sea X es una variable aleatoria discreta se tiene:

(a) $P(X > a) = 1 - F_X(x)$ (b) $P(X \geq a) = 1 - F_X(x)$

6. Si $X \equiv B(4; 0.2)$ se puede aproximar a una normal:

(a) Si (b) No

7. Si $X \equiv B(40; 0.2)$ se puede aproximar a una normal:

(a) Si (b) No

Tabla Normal N(0; 1)

z	0.00	**0.01**	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2,5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

$$\mathbf{\Phi}(-z) = 1 - \mathbf{\Phi}(z)$$

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Planteamos tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{4} p(x_i) = 1 \Rightarrow & 0.1 + a + b + c + 0.2 = 1 \\
P(X \leq 2) = 0.75 \Rightarrow & p_x(0) + p_x(1) + p_x(2) = 0.75 \\
P(X \geq 2) = 0.75 \Rightarrow & p_x(2) + p_x(3) + p_x(4) = 0.75
\end{aligned}$$

luego

$$\left.\begin{array}{l}
a + b + c = 0.7 \\
a + b = 0.65 \\
b + c = 0.55
\end{array}\right\} a = 0.15 \quad b = 0.5 \quad c = 0.05$$

La esperanza de x, $E[x] = \mu$ es

$$\mu = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.15 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.05 + 4 \cdot 0.2 = \boxed{2.8}$$

La varianza de x, σ^2 es

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = & 0^2 \cdot 0.1 + 1^2 \cdot 0.15 + 2^2 \cdot 0.5 + 3^2 \cdot 0.05 + 4^2 \cdot 0.2 - 2.8^2 \\
= & 2.04 \\
\sigma = & \sqrt{2.04} = \boxed{1.43}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1

Ejercicio 2. Hallamos la función de probabilidad para la ganancia X del juego, teniendo en cuenta que

$$P(X=15)=P(\text{ una sota o un caballo })=\frac{8}{40}$$

$$P(X=5)=P(\text{ un rey o un as })=\frac{8}{40}$$

$$P(X=-4)=P(\text{ otra carta })=\frac{24}{40}$$

x_i	15	5	-4
$p_x(x_i)$	$\frac{8}{40}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{24}{40}$

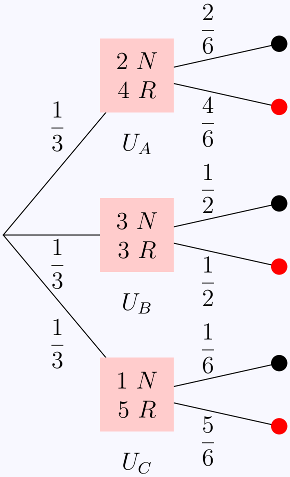
La ganancia esperanza de x, $E[x]=\mu$ es

$$\mu = 15\cdot\frac{8}{40}+5\cdot\frac{8}{40}-4\cdot\frac{24}{40}=\frac{64}{40}=\boxed{1.6}\text{ cts}$$

Ejercicio 2

Ejercicio 3.

Sea N bola negra, del diagrama se tiene



a) Probabilidad de sacar bola negra:

$$P(N) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

y la probabilidad de sacar bola roja:

$$P(R) = 1 - P(N) = \frac{2}{3}$$

b) La ganancia esperada es:

$$\begin{aligned} E[G] &= 3 \cdot P(R) + 0 \cdot P(N) \\ &= 3 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = 2 \text{ euros} \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Ejercicio 4.

$$a)\ \binom{4}{1} = \frac{4}{1} = 4 \qquad b)\ \binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15$$

$$c)\ \binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56 \qquad d)\ \binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 45$$

$$e)\ \binom{5}{0} = 1 \qquad f)\ \binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$$

$$g)\ \binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 126 \qquad h)\ \binom{13}{2} = \frac{13\cdot 12}{2\cdot 1} = 78$$

Ejercicio 4

Ejercicio 5.
Sea X el número de encestes en cinco lanzamientos

$$X \text{ es } B(n = 5; p = 0.3)$$

La probabilidad de que enceste, exactamente dos canastas de cinco lanzamientos

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \ (0.3)^2 \ (0.7)^3 = \boxed{0.3087}$$

Ejercicio 5

Ejercicio 6.
Se tiene que el número X de alumnos que se licencian en 5 años

$$X \text{ es } B(n = 10; p = 0.4)$$

a) la probabilidad de que ninguno se licencie en 5 años.

$$P(X = 0) = \binom{10}{0}\ (0.4)^0\ (0.6)^{10} = \boxed{0.0060}$$

b) la probabilidad de que todos se licencien en 5 años.

$$P(X = 10) = \binom{10}{10}\ (0.4)^{10}\ (0.6)^0 = \boxed{0.0001}$$

c) la probabilidad de que un único estudiante se licencie en 5 años.

$$P(X = 1) = \binom{10}{1}\ (0.4)^1\ (0.6)^9 = \boxed{0.0403}$$

Ejercicio 6

Ejercicio 7.
Se tiene que el número de piezas defectuosas X

$$X \text{ es } B(n=40; p=0.012)$$

a) la probabilidad de que sólo haya una defectuosa.

$$P(X=1)=\binom{40}{1}\ (0.012)^1\ (0.988)^{39}=\boxed{0.6170}$$

b) la probabilidad de que no haya ninguna defectuosa.

$$P(X=0)=\binom{40}{0}\ (0.012)^0\ (0.988)^{40}=\boxed{0.299}$$

Ejercicio 7

Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8.
Se tiene que el número de alumnos que faltan X

$$X \text{ es } B(n = 20; p = 0.04)$$

a) la probabilidad de que no se registre ninguna falta.

$$P(X = 0) = \binom{20}{0}\ (0.04)^0\ (0.96)^{20} = \boxed{0.4420}$$

b) la probabilidad de que falten a clase menos de tres estudiantes.

$$P(X < 3) = \binom{20}{0}\ (0.04)^0\ (0.96)^{20} + \binom{20}{1}\ (0.04)^1\ (0.96)^{19} + \\ + \binom{20}{2}\ (0.04)^2\ (0.96)^{18} = \boxed{0.9561}$$

c) la probabilidad de que falte a clase un único estudiante.

$$P(X = 1) = \binom{20}{1}\ (0.04)^1\ (0.96)^{19} = \boxed{0.3683}$$

Ejercicio 8

Ejercicio 9.
En una familia de 5 hijos, se tiene que el número de niñas X

$$X \text{ es } B(n = 5; p = 0.56)$$

a) la probabilidad de que tenga exactamente tres niñas.

$$P(X = 3) = \binom{5}{3}\ (0.56)^3\ (0.44)^2 = \boxed{0.3400}$$

b) la probabilidad de que tenga al menos dos niñas.

$$P(X \geq 2) = \binom{5}{2}\ (0.56)^2\ (0.44)^3 + \binom{5}{3}\ (0.56)^3\ (0.44)^2 + \binom{5}{4}\ (0.56)^4\ (0.44)^1 + \binom{5}{5}\ (0.56)^5\ (0.44)^0 = \boxed{0.8235}$$

c) el número medio de hijas en las familias con cinco hijos es la media de esta binomial

$$\mu = np = 5 \cdot 0.56 = \boxed{2,8}$$

Ejercicio 9

Ejercicio 10.
Se tiene que el número de asistentes X

$$X \text{ es } B(n = 8; p = 0.85)$$

a) la probabilidad de asistan todas.

$$P(X = 8) = \binom{8}{8}\ (0.85)^8\ (0.15)^0 = \boxed{0.3847}$$

b) la probabilidad de asistan más de 6 personas.

$$P(X \geq 7) = \binom{8}{7}\ (0.85)^7\ (0.15)^1 + \binom{8}{8}\ (0.85)^8\ (0.15)^0 = \boxed{0.6223}$$

c) la probabilidad de asista al menos la mitad.

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) = & \binom{8}{4}\ (0.85)^4\ (0.15)^4 + \binom{8}{5}\ (0.85)^5\ (0.15)^3 + \\ & \binom{8}{6}\ (0.85)^6\ (0.15)^2 + \binom{8}{7}\ (0.85)^7\ (0.15)^1 + \\ & \binom{8}{8}\ (0.85)^8\ (0.15)^0 = \boxed{0.7273} \end{aligned}$$

Ejercicio 10

Ejercicio 11.
Se tiene que el número de piezas defectuosas X

$$X \text{ es } B(n=4; p=0.2)$$

luego, la probabilidad de que entre cuatro piezas elegidas al azar, a lo sumo 2 sean defectuosas es

$$P(X \leq 2) = \binom{4}{0}\ (0.2)^0\ (0.8)^4 + \binom{4}{1}\ (0.2)^1\ (0.8)^3 + \binom{4}{2}\ (0.2)^2\ (0.8)^2 = \boxed{0.9728}$$

Ejercicio 11

Ejercicio 12.
Sea X el número de veces que se cae el patinador, se tiene que

$$X \text{ es } B(n = 5; p = 0.4)$$

luego, la probabilidad de que de que se caiga al menos 3 veces.

$$p(X \geq 3) = \binom{5}{3} (0.4)^3 (0.6)^2 + \binom{5}{4} (0.4)^4 (0.6)^1 + \binom{5}{5} (0.4)^5 (0.6)^0 = \boxed{0.3174}$$

Ejercicio 12

Ejercicio 13.

Se tipifica con $z = \dfrac{X - 18}{4}$

a) $P(x < 18) = \Phi(0) = 0.50$

b) $P(x < 28) = \Phi(2.5) = 0.9938$

c) $P(x > 16.4) = 1 - \Phi(-0.4) = \Phi(0.4) = .6554$

d) $P(x < 11) = \Phi(-1.75) = 1 - \Phi(1.75) = 1 - 0.9599 = 0.0401$

e) $P(19 < x < 23) = \Phi(1.25) - \Phi(0.25) = 0.8944 - 0.5987 = 0.2957$

f) $P(11 < x < 25) = \Phi(1.75) - \Phi(-1.75) = 2\,\Phi(1.75) - 1 = 0,9198$

Ejercicio 13

Ejercicio 14.

a) $P(z < z_0) = \Phi(z_0) = 0.50 \Rightarrow z_0 = 0$

b) $P(z < z_0) = \Phi(z_0) = 0.8729 \Rightarrow z_0 = 1.14$

c) $P(z < z_0) = \Phi(z_0) = 0.3300 \Rightarrow \Phi(-z_0) = 0.6700 \Rightarrow z_0 = -0.44$

d) $P(z > z_0) = 1 - \Phi(z_0) = 0.9015 = \Phi(1.29) \Rightarrow z_0 = -1.29$

e) $P(z < z_0) = \Phi(z_0) = 0.9971 \Rightarrow z_0 = 2.76$

f) $P(z > z_0) = 1 - \Phi(z_0) = 0.1190 \Rightarrow \Phi(z_0) = 0.8810 \Rightarrow z_0 = 1.18$

Ejercicio 14

Ejercicio 15.
La temperatura $T \sim N(21;4)$:

$$\begin{aligned} P(19 < T < 23) =& P\left(\frac{19-21}{4} < z < \frac{23-21}{4}\right) \\ =& P\left(-0.5 < z < 0.5\right) = \Phi(0.5) - \Phi(0.5) = 0,383 \end{aligned}$$

$$0.383 \times 30 \approx \boxed{11 \text{ días}}$$

Ejercicio 15

Ejercicio 16.
El tiempo $X \sim N(780; 40)$:

$$
\begin{aligned}
P(X > 800) =& P\left(X > \frac{800-780}{40}\right) \\
=& P\left(z > 0.5\right) = 1 - \Phi(0.5) = \boxed{0,3085}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 16

Ejercicio 17.

El peso X de un individuo es $X \sim N(70; 5)$:

a) La probabilidad de que el peso de un individuo esté comprendido entre 65 y 80 kg.

$$\begin{aligned} P(65 < X < 80) =& P\left(\frac{65-70}{5} < z < \frac{80-70}{5}\right) \\ =& P\left(-1 < z < 2\right) = \Phi(2) - \Phi(-1) \\ =& \Phi(2) + \Phi(1) - 1 = \boxed{0.8185} \end{aligned}$$

b) La probabilidad de que un individuo pese más de 100 kg.

$$\begin{aligned} P(X > 100) =& P\left(z > \frac{100-70}{5}\right) \\ =& P\left(z > 6\right) = 1 - \Phi(6) \approx \boxed{0} \end{aligned}$$

Ejercicio 17

Ejercicio 18.
El peso X es $X \sim N(100; 9)$:

$$
\begin{aligned}
P(80 < X < 100) =& P\left(\frac{80-100}{9} < z < \frac{100-100}{9}\right) \\
=& P\left(-2.22 < z < 0\right) = \Phi(0) - \Phi(-2.22) \\
=& \Phi(0) + \Phi(2.22) - 1 = \boxed{0.4868}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 18

MATEMATICAS
2º Bachillerato
SOCIALES
MaTEX
VARIABLES ALEATORIAS
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 19.
El número de días de duración $X \sim N(266; 16)$:

a) La probabilidad de que un embarazo dure más de 242 días.

$$\begin{aligned} P(X > 242) =& P\left(z > \frac{242 - 266}{16}\right) \\ =& P\,(z > -1.5) = \Phi(1.5) = 0.3811 \end{aligned}$$

b) El 20% de los embarazos duran menos de ¿cuántos días?

$$\begin{aligned} P(X < x_0) =& 0.2 = \Phi(-0.84) \\ \Rightarrow& -0.84 = \frac{x_0 - 266}{16} \Rightarrow x_0 = \boxed{252,56 \text{ días}} \end{aligned}$$

c) El 50% de los embarazos duran menos de ¿cuántos días?

$$\begin{aligned} P(X < x_0) =& 0.5 = \Phi(0) \\ \Rightarrow& 0 = \frac{x_0 - 266}{16} \Rightarrow x_0 = \boxed{266 \text{ días}} \end{aligned}$$

Ejercicio 19

Ejercicio 20.

El número de días de duración de una bombilla es $X \sim N(302; 40)$:

a) ¿Cuántas bombillas se espera que se fundan antes de 365 días?

$$P(X < 365) = P\left(z < \frac{365 - 302}{40}\right)$$

$$= P\left(z < 1,575\right) = \Phi(1.57) = 0.9418$$

$$0.9418 \times 20.000 = \boxed{18836 \text{ bombillas}}$$

b) ¿Cuántas bombillas durarán más de 400 días?

$$P(X > 400) = P\left(z > \frac{400 - 302}{40}\right)$$

$$= P\left(z > 2,45\right) = 1 - \Phi(2,45) = 0.0071$$

$$0.0071 \times 20.000 = \boxed{142 \text{ bombillas}}$$

Ejercicio 20

Ejercicio 21.
Se sabe que el tiempo de retraso X en minutos es $X \sim N(5;\sigma)$ y que $P(2 < X < 8) = 0.6826$:

a) ¿Cuál es la desviación típica?.

$$\begin{aligned}
P(2<X<8) =& P\left(\frac{2-5}{\sigma} < z < \frac{8-5}{\sigma}\right) = P\left(-\frac{3}{\sigma} < z < \frac{3}{\sigma}\right) \\
=& \Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{\sigma}\right) = 2\,\Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) - 1 = 0.6826 \\
\Rightarrow& \Phi(\frac{3}{\sigma}) = 0.8413 = \Phi(1) \Rightarrow \frac{3}{\sigma} = 1 \Rightarrow \boxed{\sigma = 3}
\end{aligned}$$

b) probabilidad de que llegue puntual o antes de la hora

$$P(X<0) = P\left(z < \frac{0-5}{3}\right) = \Phi(-1.67) = 1 - \Phi(1.67) = \boxed{0,0475}$$

c) prob. de que llegue con un retraso de más de 10 minutos?

$$P(X>10) = P\left(z > \frac{10-5}{3}\right) = 1 - \Phi(1.67) = \boxed{0,0475}$$

Ejercicio 21

Ejercicio 22.

Se sabe que el tiempo de duración X en años es $X \sim N(3; 0.5)$

a) ¿Qué porcentaje de baterías se espera que duren entre 2 y 4 años?.

$$\begin{aligned} P(2 < X < 4) =& P\left(\frac{2-3}{0.5} < z < \frac{4-3}{0.5}\right) \\ =& \Phi\,(2) - \Phi\,(-2) = 2\,\Phi\,(2) - 1 = \boxed{0,9544} \end{aligned}$$

b) Si una batería lleva funcionando 3 años, ¿ cuál es la probabilidad de que dure menos de 4,5 años?

$$\begin{aligned} P(X < 4.5 | X > 3) =& \frac{P\,(3 < X < 4.5)}{P\,(X > 3)} \\ =& \frac{\Phi(3) - \Phi(0)}{1 - \Phi(0)} = \frac{0.4987}{0.5} = \boxed{0.9974} \end{aligned}$$

Ejercicio 22

Ejercicio 23.
Se sabe que la puntuación X de un alumno es $X \sim N(\mu;\sigma)$ con μ y σ desconocidas.

$$\begin{aligned}
P(X \leq 12.2) =& P\left(z < \frac{12.2-\mu}{\sigma}\right) = 0.6700 = \Phi(0.44) \\
& \Rightarrow \frac{12.2-\mu}{\sigma} = 0.44 \qquad (1) \\
P(X > 16.7) =& 1 - P\left(z < \frac{16.7-\mu}{\sigma}\right) = 0.09 = 1-\Phi(1.34) \\
& \Rightarrow \frac{16.7-\mu}{\sigma} = 1.34 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema con (1) y (2)

$$\left.\begin{aligned} 12.2-\mu =& \quad 0.44\,\sigma \\ 16.7-\mu =& \quad 1.34\,\sigma \end{aligned}\right\} 4.5 = 0.9\,\sigma \Longrightarrow \boxed{\sigma = 5 \quad \mu = 10}$$

Ejercicio 23

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
VARIABLES ALEATORIAS
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 24.
Se sabe que la duración media de los televisores sigue una distribución normal,

$$X \sim N(\mu = 10; \sigma = 0.7)$$

a) Calcula la probabilidad de que un televisor dure más de 9 años.

$$\begin{aligned} P(X > 9) =& 1 - P\left(z < \frac{9-10}{0.7}\right) \\ =& 1 - \Phi(-1.43) = \Phi(1.43) = \boxed{0.9236} \end{aligned}$$

b) Calcula la probabilidad de que dure entre 9 y 11

$$\begin{aligned} P(9 < X < 11) =& P\left(\frac{9-10}{0.7} < z < \frac{11-10}{0.7}\right) \\ =& \Phi\,(1.43) - \Phi\,(-1.43) \\ =& 2\,\Phi\,(1.43) - 1 = \boxed{0,8473} \end{aligned}$$

Ejercicio 24

Ejercicio 25.

El número X de caras es de tipo $B(200; \frac{1}{2})$. Como se cumplen las condiciones $n \cdot p = 100 > 5$ y $n \cdot q = 100 > 5$, aproximamos por una normal con $\mu = 100$ y $\sigma = \sqrt{25} = 5$

a) Obtener a lo más 95 caras

$$\begin{aligned} P(X \leq 95) =& P\left(z \leq \frac{95.5 - 100}{5}\right) \\ =& P\left(z \leq -0.9\right) = \Phi(-0.9) = 1 - \Phi(0.9) = 0,1841 \end{aligned}$$

b) Obtener más de 110 caras

$$\begin{aligned} P(X > 110) =& 1 - P\left(X \leq 110\right) \\ =& 1 - P\left(z \leq \frac{110.5 - 100}{5}\right) \\ =& 1 - P\left(z \leq 2.1\right) = 1 - \Phi(2.1) = 0.0179 \end{aligned}$$

Ejercicio 25

Ejercicio 26.
El número X de niñas nacidas es de tipo $B(1000; 0.58)$. Como se cumplen las condiciones

$$n \cdot p = 1000 \cdot 0.58 = 580 > 5 \qquad n \cdot q = 420 > 5$$

aproximamos por una normal con $\mu = 500$ y $\sigma = \sqrt{243.6} = 15.6$

$$\begin{aligned} P(501 \leq X \leq 550) =& P\left(\frac{500.5 - 500}{15.6} \leq z \leq \frac{550.5 - 500}{15.6}\right) \\ =& P\,(0.03 \leq z \leq 3.24) \\ =& \Phi(3.24) - \Phi(0.03) = \boxed{0.4874} \end{aligned}$$

Ejercicio 26

Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 27. Sea X el número de reservas anuladas de entre los 150 billetes, entonces, como $X \sim B(150; 0.04)$. Para que todos los pasajeros consigan plaza se necesitan al menos 10 anulaciones, luego por la distribución binomial

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - \sum_{i=0}^{i=9} \binom{150}{i} p^i\, q^{150-i}$$

Este cálculo se puede evitar aproximando a la normal. Como se cumplen las condiciones

$$n \cdot p = 150 \cdot 0.04 = 6 > 5 \qquad n \cdot q = 144 > 5$$

aproximamos por una normal con

$$\mu = n \cdot p = 6 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{5.76} = 2.4$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) =& 1 - P\left(X \leq 9\right) \\ =& 1 - P\left(z \leq \frac{9.5 - 6}{2.4}\right) \\ =& 1 - P\left(z \leq 1.46\right) = 1 - \Phi(1.46) = 0.0721 \end{aligned}$$

Ejercicio 27

Ejercicio 28. El número de vehículos X de los 4.000 automóviles vendidos que estará en servicio dentro de dos años es $B(4000; 0.8)$, luego por aproximación a la normal $N(np, \sqrt{npq})$, tendremos

$$\begin{aligned} P(X > 3120) =& 1 - P\left(z < \frac{3119.5 - 3200}{\sqrt{640}}\right) \\ =& 1 - \Phi(-3.18) = \Phi(3.18) = 0.9993 \end{aligned}$$

Ejercicio 28

Ejercicio 29.

El número X de “seises” es de tipo $B(600; \frac{1}{6})$. Como se cumplen las condiciones $n \cdot p = 100 > 5$ y $n \cdot q = 500 > 5$, aproximamos por una normal con $\mu = 100$ y $\sigma = \sqrt{83.33} = 9.13$

a) Obtener a lo más 95 –seises–

$$\begin{aligned} P(X \leq 95) =& P\left(z \leq \frac{95.5 - 100}{9.13}\right) \\ =& P\left(z \leq -0.49\right) = \Phi(-0.49) = 1 - \Phi(0.49) = 0.3121 \end{aligned}$$

b) Obtener más de 110 –seises–

$$\begin{aligned} P(X > 110) =& 1 - P\left(X \leq 110\right) \\ =& 1 - P\left(z \leq \frac{110.5 - 100}{9.13}\right) \\ =& 1 - P\left(z \leq 1.15\right) = 1 - \Phi(1.15) = 0.1251 \end{aligned}$$

Ejercicio 29

Soluciones a los Tests

Solución al Test: En efecto, X es una variable aleatoria continua el significado de $F_X(a)$ es

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = P(X < a) = P(X \leq a)$$

ya que

$$P(X \leq a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + \int_{a}^{a} f(x)\,dx = P(X < a)$$

con $\displaystyle\int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0$ Final del Test

MATEMATICAS 2º Bachillerato
SOCIALES
MaTEX
VARIABLES ALEATORIAS
Tabla N(0,1)
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Index