1. Vectores en $\mathbb{R}^3$

1.1. Vectores libres

Un vector libre $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es un representante de cualquier vector fijo $\overrightarrow{AB}$, de extremos los puntos$A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, verificando $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $u_3 = b_3 - a_3$.

1.2. Módulo o Norma de un vector libre

Definición Dado un vector libre $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, se define su módulo como el número real $|\overrightarrow{u}|$ que proporciona la longitud de $\overrightarrow{u}$ (figura 1). Es decir:

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

- Si $|\overrightarrow{u}| = 1$, se dice que $\overrightarrow{u}$ es un vector unitario.

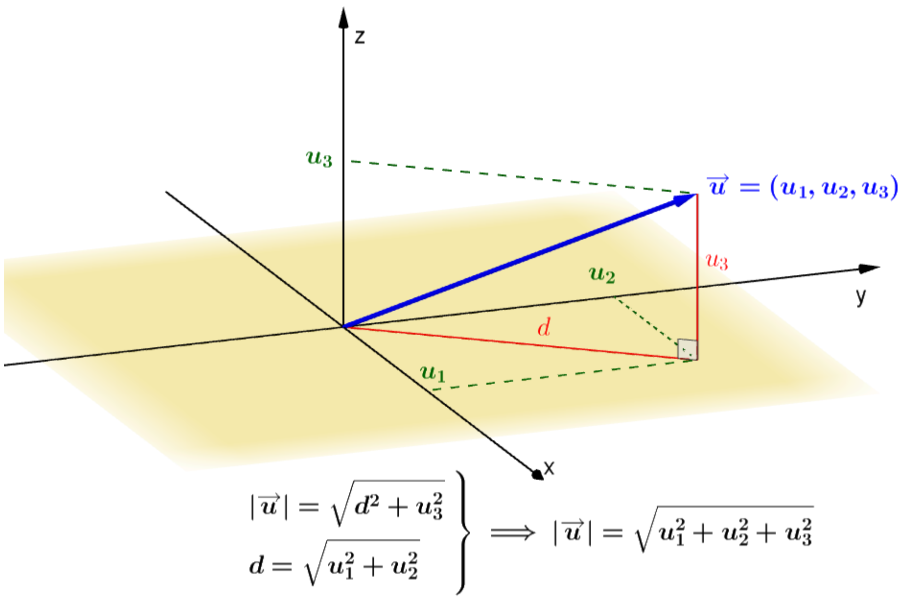


Figura 1: $|\mathbf{u}|$

Propiedades Dados $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

I) $|\overrightarrow{u}| \geq 0$

$|\overrightarrow{u}| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = (0, 0, 0)$

II) $|\lambda \cdot \overrightarrow{u}| = |\lambda||\overrightarrow{u}|$

III) $|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}| \leq |\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}|$ (Desigualdad triangular o de Minkowski)

1.3. Dependencia e independencia lineal. Base

1.3.1. Combinación lineal

Dado un sistema de vectores $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$, se dice que $\overrightarrow{u}$ es combinación lineal de los vectores del sistema si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\overrightarrow{u} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{u_n}$$

- Si $\overrightarrow{u}$ es combinación lineal del sistema $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$, se dice que $\overrightarrow{u}$ depende linealmente de los vectores $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ (figura 2).
- Si $\overrightarrow{u}$ no puede expresarse como combinación lineal de $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$, entoces $\overrightarrow{u}$ es linealmente independiente de los vectores $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ (figura 3).

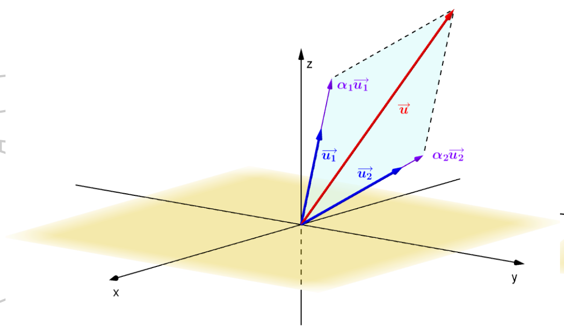


Figura 2: $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2$

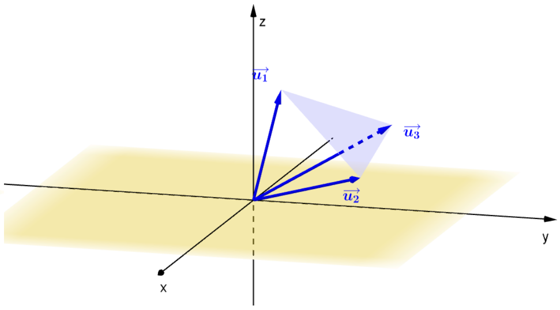


Figura 3: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ L.I.

1.4. Rango de un sistema de vectores

Dado un sistema de vectores $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$, el rango de S es el número máximo de vectores de S linealmente independientes.

- Si se construye la matriz cuyas filas (o columnas) son los vectores de S, el rango de S coincide con el rango de la matriz.
- Son equivalentes las siguientes afirmaciones:
    - I) Los n vectores de $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ son linealmente independientes.
    - II) Si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ verificando $\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{u_n} = 0$, entonces necesariamente $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

1.4.1. Teorema

En $\mathbb{R}^3$ el número máximo de vectores linealmente independientes que puede tener un sistema de vectores es 3.

1.5. Base en $\mathbb{R}^3$

- Un sistema de vectores de $\mathbb{R}^3$ formado por tres vectores linealmente independientes recibe el nombre de base.
- Si $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, entonces, para cualquier vector $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ existen únicos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que $\overrightarrow{v} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \alpha_3\overrightarrow{u_3}$.

  Es decir, cualquier vector $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^3$ puede expresarse como combinación lineal de vectores de $\mathcal{B}$, y dicha combinación lineal es única.
- Si los vectores de una base son ortogonales (perpendiculares) dos a dos, y unitarios, se dice que la base es ortonormal.
- Los vectores $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, y $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$ forman la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

2. Producto Escalar

Dados $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, se define el producto escalar de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ como el número real $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ (o también $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$):

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Observación De la definción de producto escalar, se tiene que

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|^2$$

O equivalentemente:

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}$$

2.1. Propiedades del producto escalar

Para cualesquier $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

i) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} \geq 0$.

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \iff \overrightarrow{u} = (0, 0, 0)$

ii) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$

iii) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$

iv) $\alpha\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \alpha\overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$

2.2. Interpretación geométrica del producto escalar

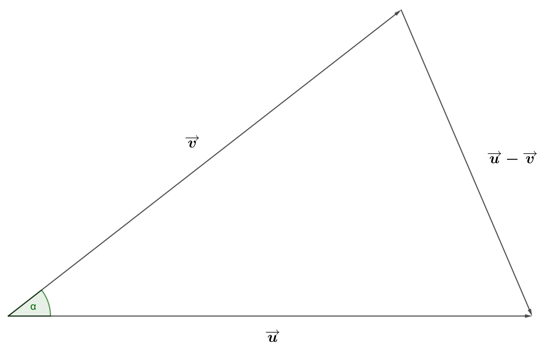
I) Si aplicamos el Teorema del Coseno al triángulo de lados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, siendo α el ángulo comprendido entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\cdot|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\alpha)$$

Dado que $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v}$, entonces:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(\alpha)$$

Como consecuencia de la anterior igualdad, el producto escalar puede utilizarse para calcular el ángulo formado por dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



- $\cos(\angle(\vec{u},\vec{v})) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$
- $\vec{u}\perp\vec{u} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

II) De $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(\alpha)$, se deduce que $\vec{u}\cdot\vec{v}$ es el producto del módulo de $\vec{u}$ por la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

El vector $\dfrac{|\vec{v}|\cos(\alpha)}{|\vec{u}|}\vec{u} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$ es el vector proyección $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ (figura 4)

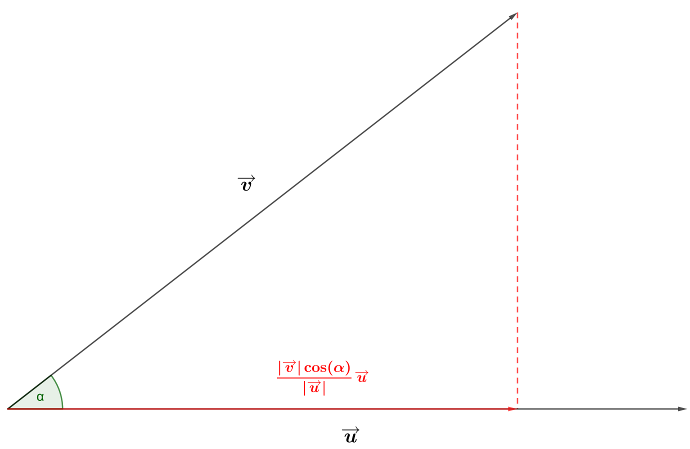


Figura 4: Vector proyección de **u** sobre **v**

3. Producto Vectorial

Dados $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, se define el producto vectorial de $\overrightarrow{u}$ por $\overrightarrow{v}$ como el vector $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ (o también $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$) perpendicular a ambos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, dado por la expresión:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

I) El vector $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ es perpendicular a $\overrightarrow{u}$ y a $\overrightarrow{v}$. Es decir:

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = 0 \;\text{ y }\; \overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = 0$$

II) Se cumple que $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \operatorname{sen}(\alpha)$, con $\alpha = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

3.1. Propiedades del producto vectorial

Las propiedades del producto vectorial se deducen fácilmente de las propiedades de los determinantes.

Para cualesquier $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

I) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (0, 0, 0)$ si y solo si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son linealmente dependientes (paralelos).

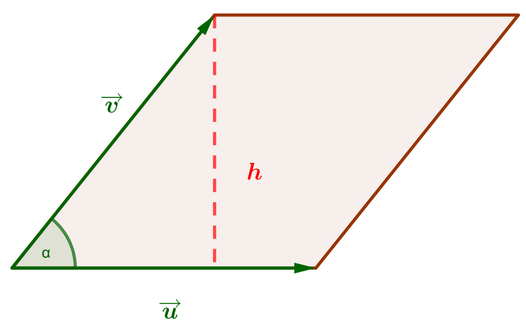
II) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$

III) $(\alpha \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$

IV) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$

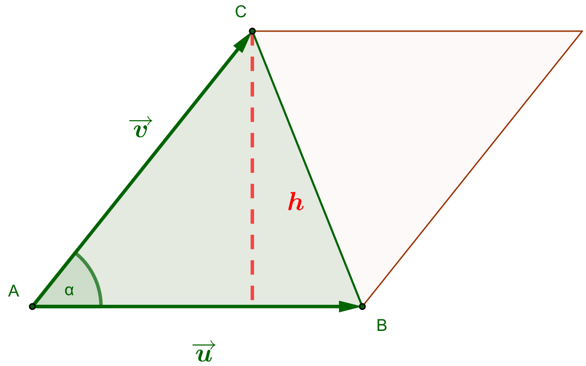
3.2. Interpretación geométrica del producto vectorial

Dado que $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \operatorname{sen}(\alpha)$, con $\alpha = \angle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, el módulo del producto vectorial proporciona el área del paralelogramo de lados dados por $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.



$$\left.\begin{aligned} \textbf{Área} &= |\overrightarrow{u}| \cdot h \\ \operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{h}{|\overrightarrow{v}|} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \textbf{Área} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|$$

Análogamente, para calcular el área de un triángulo $\Delta\, ABC$, basta considerar $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, y tener en cuenta que el área del triángulo será la mitad del área del paralelogramo de lados $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.



$$\left.\begin{array}{l} \textbf{Área}\boldsymbol{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|\vec{u}|\cdot h \\ \textbf{sen}(\alpha) = \dfrac{h}{|\vec{v}|} \end{array}\right\} \Longrightarrow \textbf{Área}\boldsymbol{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \textbf{sen}(\alpha) = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$$

4. Producto Mixto

Dados $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, se define el producto mixto de dichos vectores como el número real $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

De las defininciones de producto escalar y producto vectorial, se sigue que:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

4.1. Propiedades del producto mixto

Como consecuencia de las propiedades de los determinantes, se tienen:

I) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Longleftrightarrow rango\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} < 3$ (es decir, si los vectores son coplanarios)

II) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$

III) $[\vec{u_1} + \vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u_1}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w}]$

IV) $[k\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = k[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \quad \forall\, k \in \mathbb{R}$

4.2. Interpretación geométrica del producto mixto

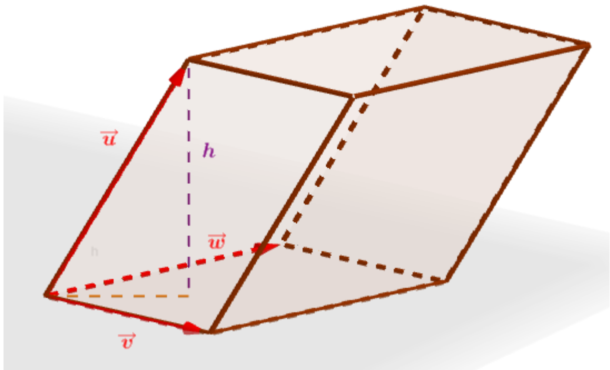
De la definición de producto mixto y la interpretación geométrica del producto escalar, se tiene:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = |\vec{u}||\vec{v} \times \vec{w}|\cos(\alpha)$$

siendo α el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v} \times \vec{w}$.

Por tanto, el valor absoluto del producto mixto de los vectores es el volumen del paralelepípedo cuyas aristas están determinadas por dichos vectores:

$$V_{\text{paralelepípedo}} = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$



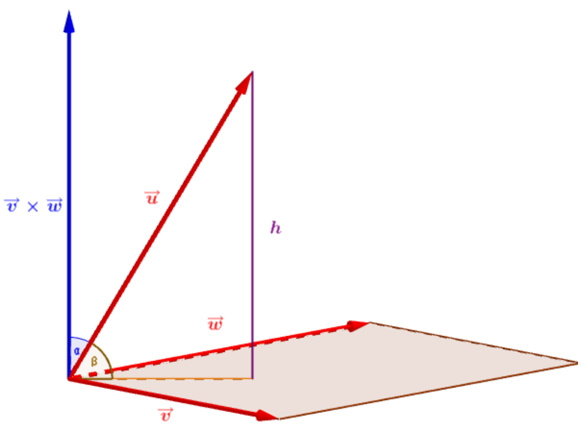
En efecto, el volumen de un paralelepípedo es área de la base por altura. De la interpretación geométrica del producto vectorial se tendría

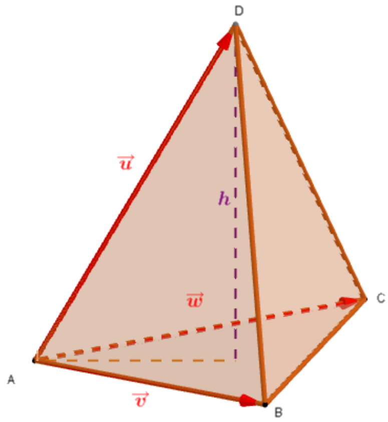
$$V_{\text{paralelepípedo}} = |\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}| \cdot h$$

Por otra parte:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(\beta) = \frac{h}{|\overrightarrow{u}|} \\ \operatorname{sen}(\beta) = \cos(90^\circ - \beta) = \cos(\alpha) \end{array}\right\} \Longrightarrow h = |\overrightarrow{u}|\cos(\alpha)$$

siendo α el ángulo formado por $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ Es decir





$$V_{\text{paralelepípedo}} = |\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}| \cdot |\overrightarrow{u}|\cos(\alpha) = |\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})| = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|$$

Análogamente, si A, B, C y D son los vértices de un tetraedro, haciendo $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AD}$, se tiene:

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|$$

5. Ecuaciones de rectas y planos en el espacio

5.1. Ecuación del plano

I) Dados tres puntos A, B, C (o equivalentemente, un punto A y dos vectores directores, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$).

Cualquier punto $P = (x, y, z)$ genérico del plano verificará que los vectores $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son coplanarios, (equivalentemente, el vector $\overrightarrow{AP}$ es combinación lineal de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$). Es decir:

- Ecuación cartesiana o general o implícita $[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$
- Ecuaciones paramétricas $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$

Ejemplo Determinar la ecuación del plano que pasa por $A = (0, 1, 2)$, $B = (1, 1, 1)$ y $C = (1, 0, 1)$.

Ecuación general:

$$\pi : [\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0 \Longleftrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \pi : -x - z + 2 = 0$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\pi : \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = 2 - \lambda - \mu \end{cases}$$

II) Dados un punto A y un vector $\overrightarrow{n}$ normal (perpendicular u ortogonal) al plano.

Cualquier punto $P = (x, y, z)$ genérico del plano verificará $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{n}$. Es decir:

- Ecuación implícita $\overrightarrow{AP} \cdot n = 0$ (figura 5)
- Ecuaciones paramétricas (A partir de la ecuación general puede deducirse un punto del plano, y dos vectores directores) (figura 6)

Ejemplo Determinar la ecuación general del plano que pasa por $A = (1, 1, 0)$ y tiene vector normal $\overrightarrow{n} = (2, 3, 1)$.

Ecuación general:

$$\pi : \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Longleftrightarrow \pi : \Longleftrightarrow (x-1, y-1, z) \cdot (2, 3, 1) = 0 \Longleftrightarrow \pi : 2x + 3y + z - 5 = 0$$

Ecuaciones paramétricas: Los vectores $\overrightarrow{u} = (1, 0, -2)$ y $\overrightarrow{v} = (0, 1, -3)$ son vectores directores de π (son perpendiculares a $\overrightarrow{n}$).

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \mu \\ z = -2\lambda - 3\mu \end{cases}$$

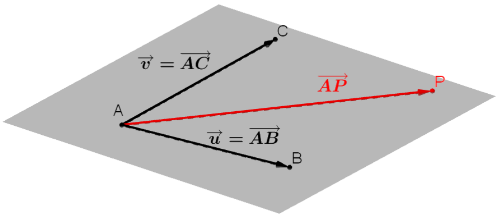


Figura 5: $[\mathbf{AP}, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}] = 0$

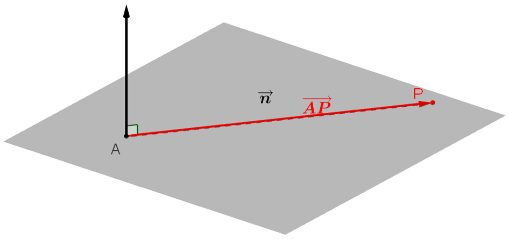


Figura 6: $\mathbf{AP} \cdot \mathbf{n} = 0$

5.2. Ecuación de la recta

Dados dos puntos $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ (o equivalentemente, un punto A y un vector director $\vec{u} = \vec{AB} = (u_1, u_2, u_3)$).

Cualquier punto genérico $P = (x, y, z)$ verificará que $\vec{AP} = \lambda \vec{AB}$. Es decir:

- Ecuaciones paramétricas $r : \begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 \end{cases}$
- Ecuación continua $r : \dfrac{x - a_1}{u_1} = \dfrac{y - a_2}{u_2} = \dfrac{z - a_3}{u_3}$
- Ecuación general $r : \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Ex + Fy + Gz + H = 0 \end{cases}$

  La recta se expresa como la intersección de dos planos. El producto vectorial de los vectores normales a los planos, es el vector director de la recta.

Ejemplo Determinar las ecuaciones de la recta que une $A = (1, 3, -1)$ y $B = (0, 1, 2)$.

Ecuaciones paramétricas $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$

Ecuación continua $r : \dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 3}{-2} = \dfrac{z + 1}{3}$

Ecuación general $r : \begin{cases} -2x - y + 5 = 0 \\ 3x - z - 4 = 0 \end{cases}$

6. Posiciones relativas

6.1. Posiciones relativas de rectas

Sea r la recta que pasa por el punto R con vector director $\vec{u_r}$, y s la recta que pasa por el punto S, y con vector director $\vec{u_s}$ (figuras 7, 8, 9, y 10):

- $\vec{u_r} \parallel \vec{u_s} \quad (\vec{u_r} = \lambda \vec{u_s}) \implies \begin{cases} R \in s \implies r = s & \text{(rectas coincidentes)} \\ R \not\in s \implies r \parallel s & \text{(rectas paralelas)} \end{cases}$
- $\vec{u_r} \not\parallel \vec{u_s} \quad (\vec{u_r} \neq \lambda \vec{u_s}) \implies \begin{cases} [\vec{u_r}, \vec{u_s}, \vec{RS}] \neq 0 \implies r \cap s = \emptyset & \text{(r y s se cruzan)} \\ [\vec{u_r}, \vec{u_s}, \vec{RS}] = 0 \implies r \cap s = P \in \mathbb{R}^3 & \text{(r y s secantes)} \end{cases}$

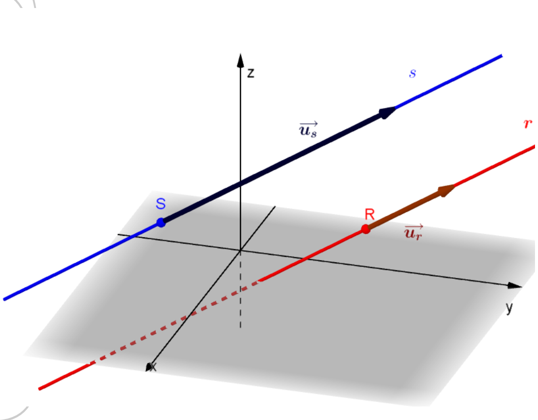


Figura 7: $r \parallel s$

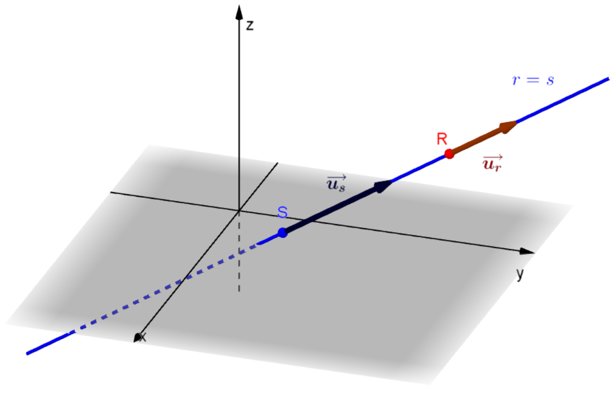


Figura 8: $r = s$

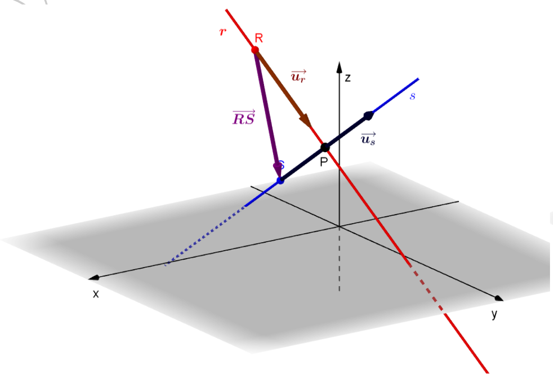


Figura 9: r y s secantes

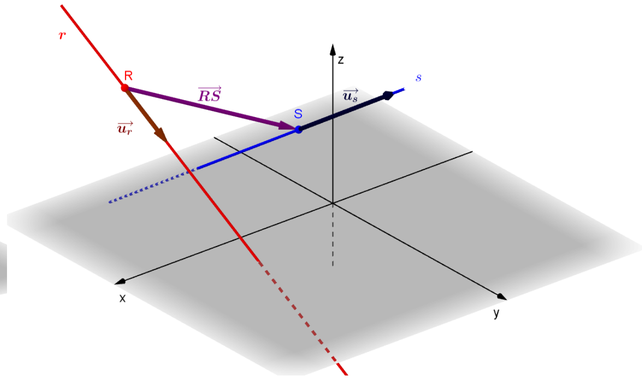


Figura 10: r y s se cruzan

6.2. Posiciones relativas de planos

I) Posiciones relativas de dos planos (figuras 11, 12 y 13).

Sea π_1 el plano que pasa por A con vector normal $\overrightarrow{n_1}$, y π_2 el plano que pasa por B con vector normal $\overrightarrow{n_2}$:

- $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \quad (\overrightarrow{n_1} = \lambda \overrightarrow{n_2}) \implies \begin{cases} A \in \pi_2 \implies \pi_1 = \pi_2 & \text{(planos coincidentes)} \\ A \notin \pi_2 \implies \pi_1 \parallel \pi_2 & \text{(planos paralelos)} \end{cases}$
- $\overrightarrow{n_1} \nparallel \pi_2 \quad (\overrightarrow{n_1} \neq \lambda \overrightarrow{n_2}) \implies \pi_1 \cap \pi_2 = r$ (Los planos se intersecan en una recta)

II) Posiciones relativas de tres planos (figuras 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 y 21).

Sean los planos π_1, π_2, π_3, con vectores normales $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$, y $\overrightarrow{n_3}$:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \pi_2 &: a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ \pi_3 &: a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{aligned}$$

Determinar la posición relativa es discutir el sistema lineal formado por las tres ecuaciones de los planos, con matriz del sistema A, y matriz ampliada A^*.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

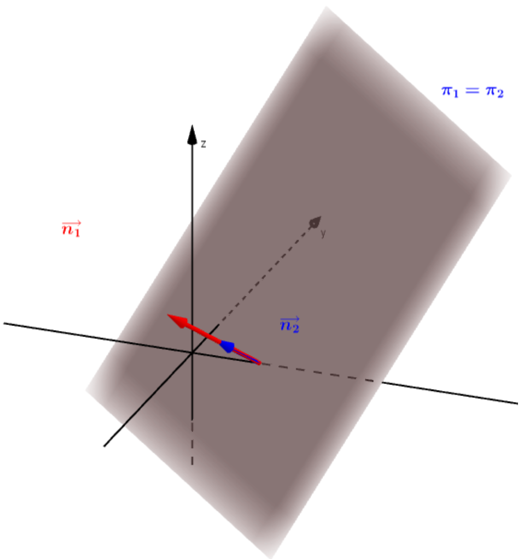


Figura 11: $\pi_1 = \pi_2$

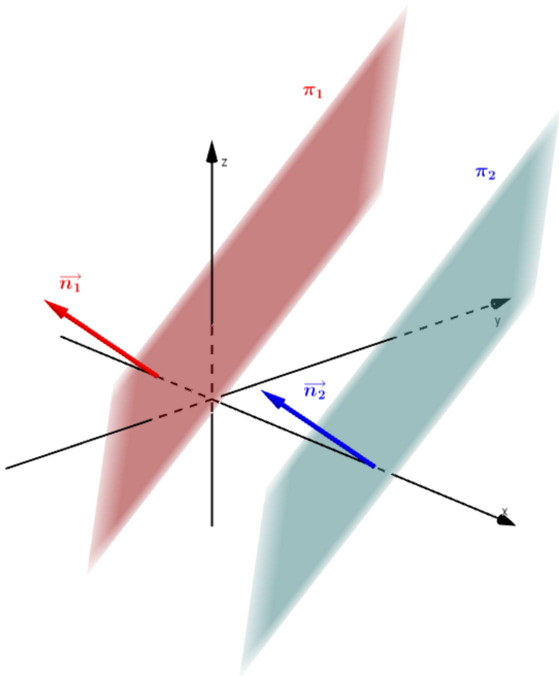


Figura 12: $\pi_1 = \pi_2$

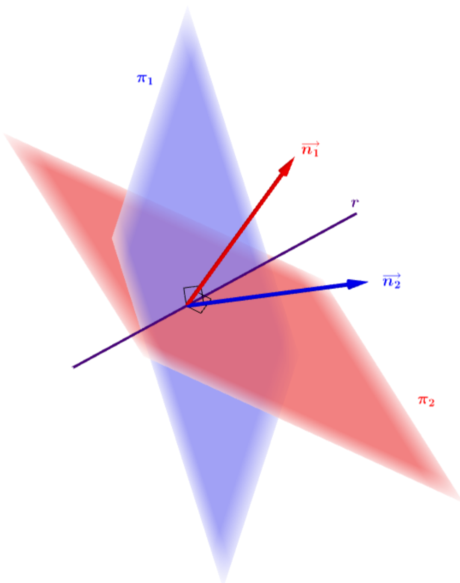


Figura 13: $\pi_1 \cap \pi_2 = r$

- $rango(A) = rango(A^*) = 3 \iff \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = P \in \mathbb{R}^3$
  Es decir, si los vectores normales de los planos son linealmente independientes, los planos se cortan en un único punto P.
- $rango(A) = rango(A^*) = 2$:
  - $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \nparallel \overrightarrow{n_3} \implies \pi_1 = \pi_2,\ \pi_1 \cap \pi_3 = r$
    Es decir, dos vectores normales son paralelos, y el tercero es linealmente independiente. Como el sistema es compatible indeterminado, lo que significa es que realmente tenemos dos planos coincidentes que se intersecan

con un tercero en una recta.

- $\overrightarrow{n_1} \nparallel \overrightarrow{n_2}$ y $\overrightarrow{n_3} = \alpha\overrightarrow{n_1} + \beta\overrightarrow{n_2} \implies \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$.
  Es decir, tenemos dos vectores linealmente independientes, y otro que se puede expresar como combinación lineal de ellos. Como el sistema es compatible indeterminado, esto significa que tenemos tres planos distintos que se intersecan en una recta.

- $rango(A) = rango(A^*) = 1 \implies \pi_1 = \pi_2 = \pi_3$.
  Es decir, se trata de tres planos coincidentes, porque los tres vectores normales son paralelos y el sistema es compatible indeterminado.

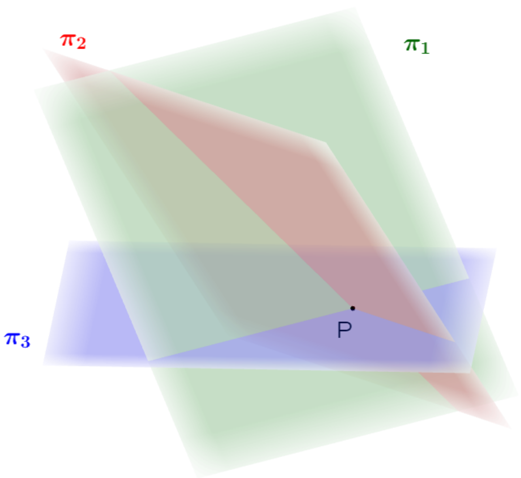


Figura 14: $r(A) = 3$

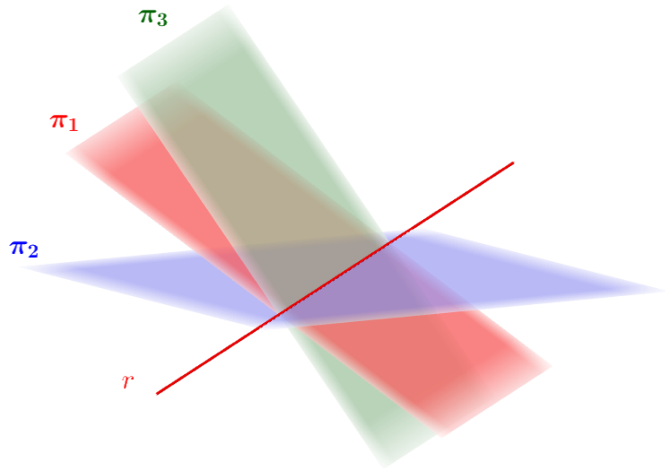


Figura 15: $r(A) = r(A^*) = 2$

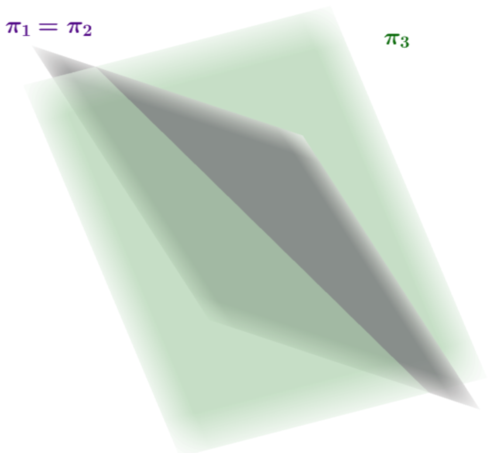


Figura 16: $r(A) = r(A^*) = 2$

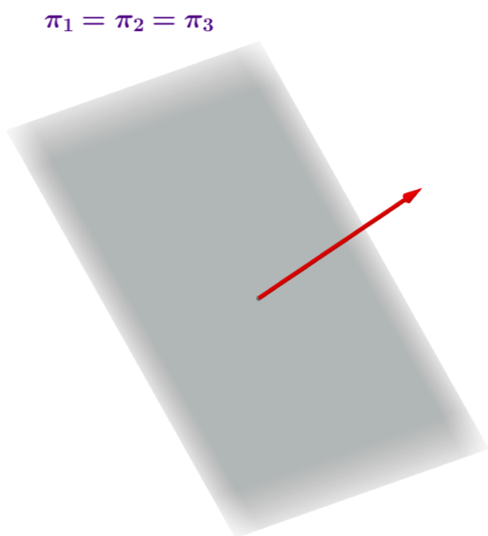


Figura 17: $r(A) = r(A^*) = 1$

- $rango(A) = 2 < rango(A^*) = 3$:
  - $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \implies \pi_1 \parallel \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_3 = r$ y $\pi_2 \cap \pi_3 = s$ (con $r \parallel s$)

Es decir, dos planos son paralelos (por tener vectores normales proporcionales), y el tercero se interseca con cada uno de ellos en una recta (dichas rectas serán paralelas).

- $\overrightarrow{n_1} \nparallel \overrightarrow{n_2}$ y $\overrightarrow{n_3} = \alpha\overrightarrow{n_1} + \beta\overrightarrow{n_2} \implies \pi_1 \cap \pi_2 = r, \pi_1 \cap \pi_3 = s, \pi_2 \cap \pi_3 = t$ (con $r \parallel s \parallel t$)
  Es decir, los planos se intersecan dos a dos en rectas (porque no hay relaciones de paralelismo entre los vectores normales). Esas tres rectas son paralelas.

- $rango(A) = 1 < rango(A^*) = 2$
  En este caso, los tres vectores normales a los planos son proporcionales ($rango(A) = 1$), pero de $rango(A^*) = 2$ se sigue $\pi_1 = \pi_2 \parallel \pi_3 \implies$. Es decir, hay dos planos coincidentes y un tercero paralelo a ellos.

- $rango(A) = 1 < rango(A^*) = 3$.
  En este caso los tres vectores normales son proporcionales ($rango(A) = 1$), pero ninguna ecuación es proporcional a otra ($rango(A^*) = 3$). Por tanto, hay tres planos paralelos: $\pi_1 \parallel \pi_2 \parallel \pi_3$.

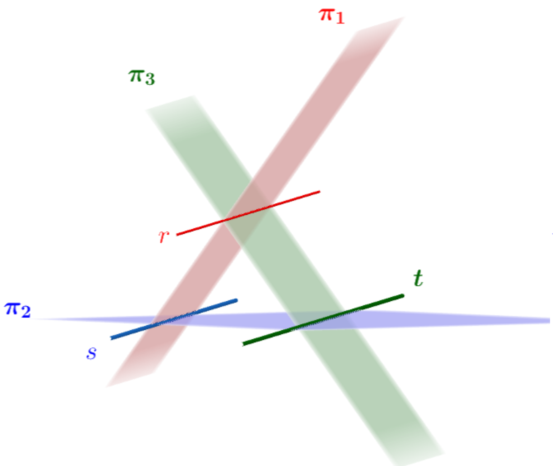


Figura 18: $r(A) = 2, r(A^*) = 3$

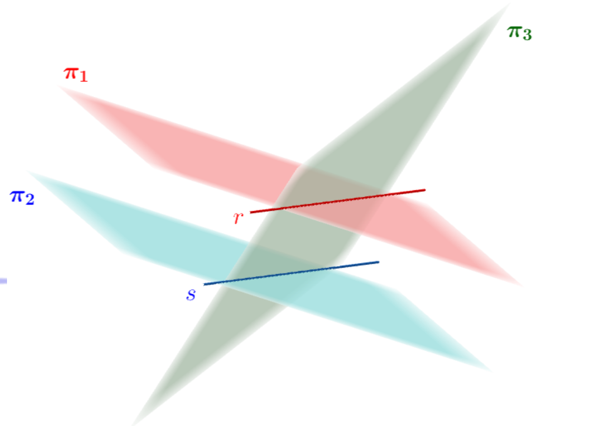


Figura 19: $r(A) = 2, r(A^*) = 3$

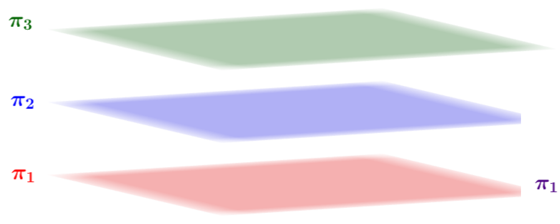


Figura 20: $r(A) = 1, r(A^*) = 3$

Figura 21: $r(A) = 1, r(A^*) = 2$

6.3. Posiciones relativas de rectas y planos

Sea r la recta que pasa por el punto A con vector director $\overrightarrow{u_r}$, y π el plano con vector director $\overrightarrow{n}$ (figuras 22 y 23).

- $\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{n} \implies \begin{cases} A \in \pi \implies r \subset \pi & (r \text{ contenida en el plano } \pi) \\ A \notin \pi \implies r \parallel \pi (\text{recta y plano paralelos}) \end{cases}$
- $\overrightarrow{u_r} \not\perp \overrightarrow{n} \implies r \cap \pi = P \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{recta y plano secantes})$

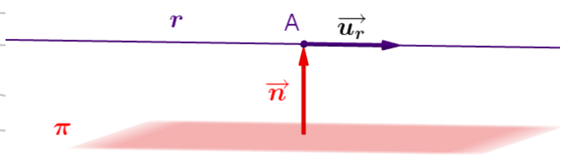


Figura 22: $r \parallel \pi$

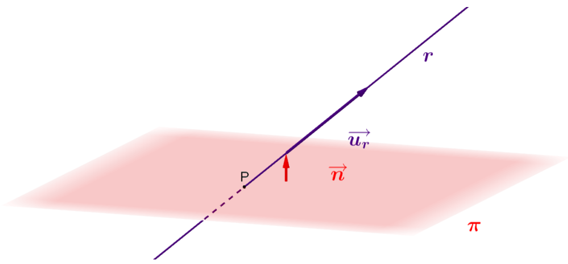


Figura 23: $r \cap \pi = P$

7. Problemas métricos

7.1. Distancias

7.1.1. Distancia entre dos puntos

La distancia entre los puntos $P = (p_1, p_2, p_3), Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ es el módulo del vector fijo $\overrightarrow{PQ}$:

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$$

7.1.2. Distancia de un punto a una recta

Sean r es una recta que pasa por A con vector director u, y P un punto del espacio. Si $\alpha = \angle(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u})$ (figura 24):

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{d}{|\overrightarrow{AP}|} \\[2ex] |\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{u}| = |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{u}|\operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} \implies d = d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{u}|}$$

7.1.3. Distancia de un punto a un plano

Sea π un plano que pasa por el punto A con vector director $\overrightarrow{n}$, y sea P un punto del espacio. Si $\alpha = \angle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{AP})$ (figura 25):

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \dfrac{d}{|\overrightarrow{AP}|} \\ \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha) \\ \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n} = |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{n}|\cos\alpha \end{array}\right\} \implies d = d(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$$

Como $A = (a_1, a_2, a_3) \in \pi$, si $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $\pi : n_1x + n_2y + n_3z + d = 0$, entonces

$$d(P, \pi) = \frac{|n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

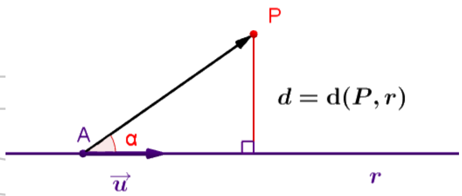


Figura 24: $d(P, r)$

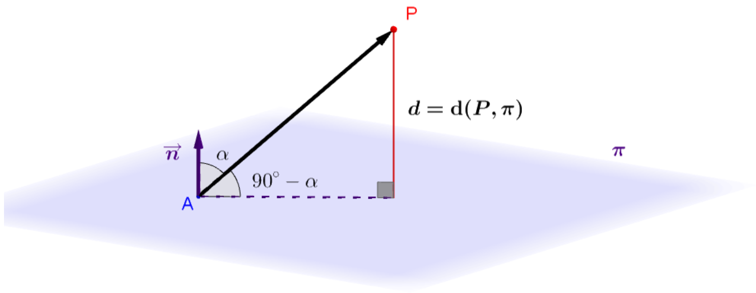


Figura 25: $d(P, \pi)$

7.1.4. Distancia de una recta a un plano

Sea r una recta con vector director $\vec{u}$, y π un plano con vector normal $\vec{n}$. Entonces:

- $r \subset \pi$ o $r \cap \pi = P \in \mathbb{R}^3 \implies d(r, \pi) = 0$
- $r \parallel \pi \implies d(r, \pi) = d(A, \pi)$, siendo A cualquier punto de r

7.1.5. Distancia entre dos rectas

Sean r y s dos rectas con vector director $\vec{u_r}$ y $\vec{u_s}$ respectivamente. Entonces:

- $r = s$ o $r \cap s = P \in \mathbb{R}^3 \implies d(r, s) = 0$
- $r \parallel s \implies d(r, s) = d(R, s)$, siendo R cualquier punto de r.
- r y s se cruzan (26):

  Dados $R \in r$, y $S \in s$, la distancia coincide con la altura del paralelepípedo cuyas aristas vienen dadas por los vectores $\vec{u_r}$, $\vec{u_s}$, y $\overrightarrow{RS}$.

  $$V_{paralelepipedo} = \text{Área base} \cdot d \implies |[\vec{u_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{RS}]| = |\vec{u_r} \times \vec{u_s}|$$

  Por tanto

  $$d = \frac{|[\vec{u_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{RS}]|}{|\vec{u_r} \times \vec{u_s}|}$$

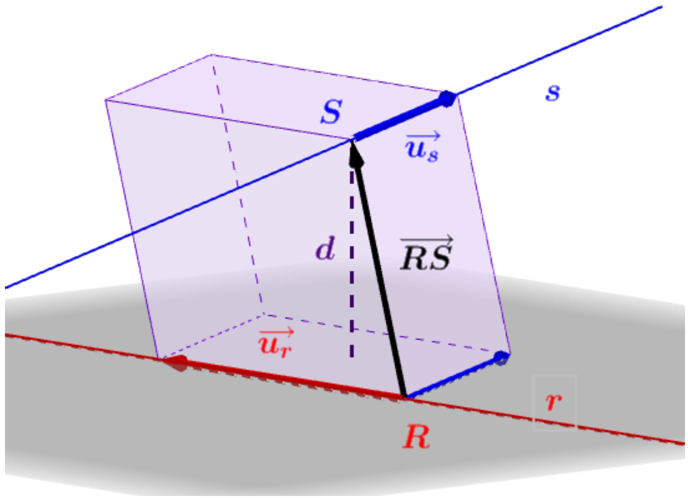


Figura 26: $d(r, s)$

7.2. Ángulos

- Ángulo entre dos planos secantes: Es el menor ángulo formado por los vectores normales a dichos planos (figura 27).
- Ángulo entre dos rectas secantes: Es el menor ángulo formado por los vectores directores de dichas rectas (figura 28).
- Ángulo formado por una recta y un plano secantes: Es el complementario del menor ángulo formado por el vector director de la recta, y el vector normal al plano (figura 29).

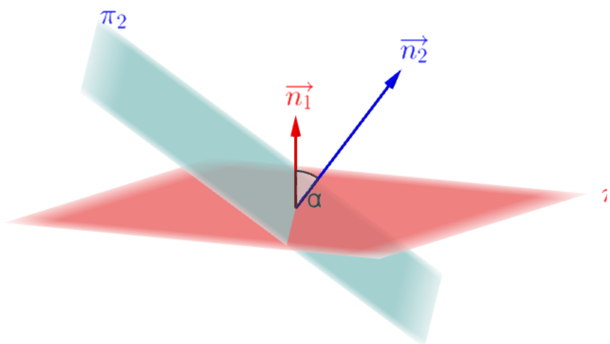


Figura 27: $\angle(\pi_1, \pi_2)$

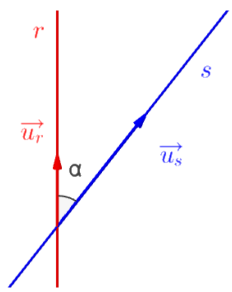


Figura 28: $\angle(r, s)$

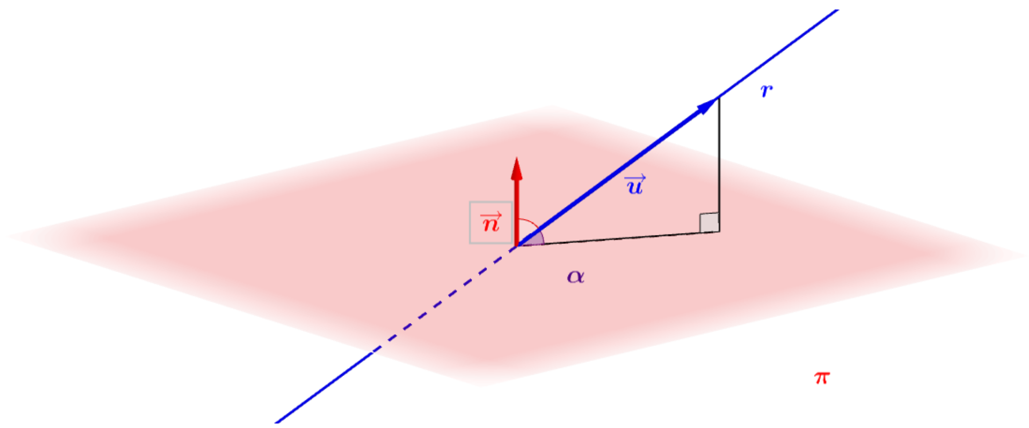


Figura 29: $\angle(r, \pi) = \alpha = 90° - \angle(\mathbf{u}, \mathbf{n})$