Proyecto MaTEX

Rectas y Planos

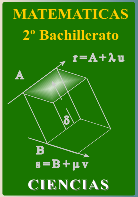
Fco Javier González Ortiz

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

10 de junio de 2004

Versin 1.00

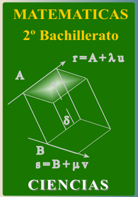


MaTEX

Rectas y Planos

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Tabla de Contenido

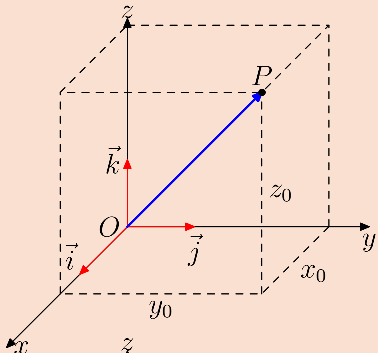


◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

1. Sistema de referencia

Un sistema de referencia en el espacio consta de un punto O llamado origen y tres vectores $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Cualquier punto $P(x_0, y_0, z_0)$ tiene un vector de posición $\overrightarrow{OP}$.

$$\overrightarrow{OP} = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} + z_0\,\vec{k}$$



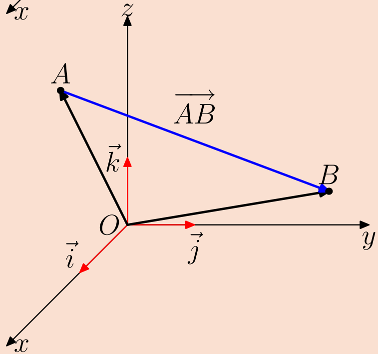
- **Vector de dos puntos**

Dados los puntos $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$ se tiene

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

luego

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$



$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)}$$

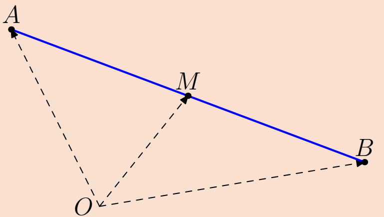
- **Punto medio de dos puntos**

Dados los puntos $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$ se tiene que el punto medio del segmento AB verifica

$$\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AM}$$

luego

$$(B-A) = 2\,(M-A) \Longrightarrow M = \frac{A+B}{2}$$



$$\boxed{M = \left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}\right)}$$

Ejemplo 1.1. Hallar el vector $\overrightarrow{AB}$ y el punto medio de los puntos $A(-1, 3, 4)$ y $B(3, 1, 2)$.

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1, 2) - (-1, 3, 4) = (4, -2, 2)$$

$$M = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (1, 2, 3)$$

□

2. Ecuaciones de la recta

Definición 2.1 *La ecuación de una recta viene determinada por un punto $A(x_0, y_0, z_0)$ y un vector $\vec{u}$.*

$$r \equiv < A; \vec{u} >$$

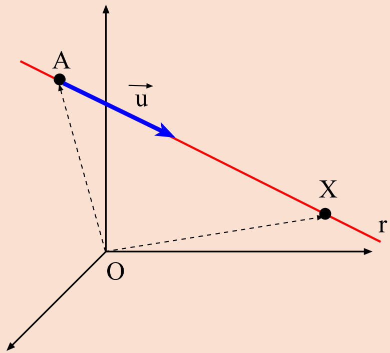
En el dibujo se observa que un punto X pertenece a la recta r, si el vector $\overrightarrow{AX}$ es proporcional al vector $\vec{u}$, es decir $\overrightarrow{AX} = \lambda\,\vec{u}$ para algún $\lambda \in R$.

Siendo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}\\ \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} &= \lambda\,\vec{u}\\ (X-O)-(A-O) &= \lambda\,\vec{u}\end{aligned}$$

despejando X se obtiene la ecuación

$$\boxed{\mathbf{r} \equiv X = A + \lambda\,\vec{u}} \qquad (1)$$



en coordenadas se obtiene

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\,(u_1, u_2, u_3)$$

Dependiendo de como escribamos la expresión anterior obtenemos diferentes ecuaciones de la recta.

2.1. Tipos de Ecuaciones de la recta

- **Ecuación Vectorial**. Expresando la ecuación 1 en coordenadas

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\,(u_1, u_2, u_3)$$

- **Ecuaciones Paramétricas**. Separando las componentes

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda\,u_1 \\ y & = & y_0 + \lambda\,u_2 \\ z & = & z_0 + \lambda\,u_3 \end{array}\right\}$$

- **Ecuaciones Continua**. Despejando en la expresión anterior el parámetro λ e igualando

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

- **Ecuaciones Cartesianas**. Operando las igualdades, es decir, agrupando términos y ordenando se obtiene las expresiones:

$$\left.\begin{array}{rcl} Ax + By + Cz + D & = & 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' & = & 0 \end{array}\right\}$$

Ejemplo 2.1. Determinar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1, 2, 1)$ y $B(0, 3, 2)$.

Solución: El vector director $\vec{u} = \vec{AB} = (-1, 1, 1)$

- **Ecuación Vectorial**. $(x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda\,(-1, 1, 1)$

- **Ecuaciones Paramétricas**. $\left.\begin{array}{rcl} x &=& 1-\lambda \\ y &=& 2+\lambda \\ z &=& 1+\lambda \end{array}\right\}$
- **Ecuación Continua**. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$
- **Ecuaciones Cartesianas**. Operando las igualdades, agrupando términos y ordenando se obtiene las expresiones:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{x-1}{-1} &=& \dfrac{y-2}{1} \\ \dfrac{y-2}{1} &=& \dfrac{z-1}{1} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad r \equiv \left\{\begin{array}{rcl} x+y-3 &=& 0 \\ y-z-1 &=& 0 \end{array}\right\}$$

$\square$

Ejemplo 2.2. Determinar de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$, su dirección y dos puntos de la misma.

Solución: La dirección viene dada por $\vec{u}=(2,3,1)$. Un punto es $A(1,-1,2)$. Para hallar otro punto usamos la expresión vectorial

$$r \equiv X = A + \lambda\,\vec{u}$$

Haciendo $\lambda = 2$ obtenemos

$$X_1 = (1,-1,2) + 2\,(2,3,1) = (5,5,4)$$

Haciendo $\lambda = 3$ obtenemos

$$X_2 = (1, -1, 2) + 3\,(2, 3, 1) = (7, 8, 5)$$

y así sucesivamente para obtener más puntos. $\square$

Ejemplo 2.3. Dada la recta: $\left.\begin{array}{rcl} x & = & 1 - 3\lambda \\ y & = & 2 + \lambda \\ z & = & 1 + 2\lambda \end{array}\right\}$

Determinar su vector direccional y dos puntos de la misma.

Solución:

Su vector direccional es $\vec{u} = (-3, 1, 2)$. Un punto es $A(1, 2, 1)$. Para hallar otro punto damos valores al parámetro λ, por ejemplo, haciendo $\lambda = 1$ obtenemos

$$\left.\begin{array}{rcccr} x & = & 1 - 3(1) & = & -2 \\ y & = & 2 + (1) & = & 3 \\ z & = & 1 + 2(1) & = & 3 \end{array}\right\}$$

$\square$

Ejercicio 1. Comprobar si los puntos $A(2, 3, 1), B(5, 4, 3)$ y $C(2, 1, 2)$ están alineados.

Ejercicio 2. Dados los puntos $A(m, 2, -3)$, $B(2, m, 1)$ y $C(5, 3, -2)$, determinar el valor de m para que estén alineados, y hallar la recta que los contiene.

Ejercicio 3. Dada la recta $r \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - 3 & = & 0 \\ y - z - 1 & = & 0 \end{array} \right.$, escribirla en forma continua.

3. Ecuación del plano

Definición 3.1 *La ecuación de un plano viene determinada por un punto* $A(x_0, y_0, z_0)$ *y dos vectores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *linealmente independientes.*

$$\pi \equiv < A; \vec{u}, \vec{v} >$$

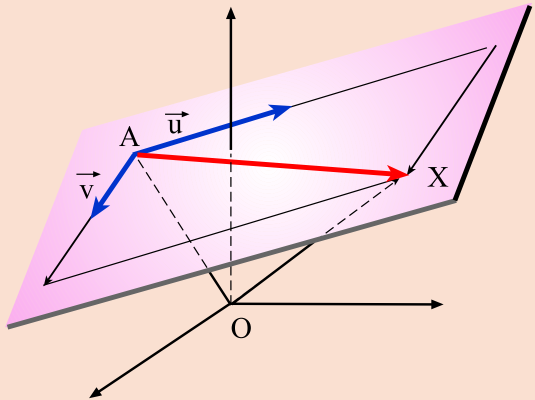
Un punto X *pertenece al plano* π*, observar el dibujo, si el vector* $\overrightarrow{AX}$ *es combinación lineal de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$*, es decir*

$$\overrightarrow{AX} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$$

para algún $\lambda, \mu \in R$

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}$$

Identificando $\overrightarrow{OX} = X$ y $\overrightarrow{OA} = A$ se obtiene la ecuación



$$\boxed{\pi \equiv X = A + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}} \qquad (2)$$

3.1. Tipos de Ecuaciones del plano

- **Ecuación Vectorial.**Expresando la ecuación 2 en coordenadas

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\,(u_1, u_2, u_3) + \mu\,(v_1, v_2, v_3)$$

- **Ecuaciones Paramétricas**. Separando las componentes

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& x_0 + \lambda\, u_1 + \mu\, v_1 \\ y &=& y_0 + \lambda\, u_2 + \mu\, v_2 \\ z &=& z_0 + \lambda\, u_3 + \mu\, v_3 \end{array}\right\}$$

- **Ecuación Cartesiana**. Para hallar la ecuación cartesiana del plano hay que eliminar los parámetros λ y μ en las ecuaciones paramétricas. Como el vector $\overrightarrow{AX}$ es combinación lineal de los vectores direccionales $\overrightarrow{u}$ y $\vec{v}$, el rango de la matriz $(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v})$ es 2

$$rg \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$$

y por tanto su determinante es nulo.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv ax + by + cz + d = 0} \qquad (3)$$

Ejemplo 3.1. Determinar las ecuaciones del plano que pasa por los puntos $A(2,3,5)$, $B(1,1,2)$ y $C(3,6,10)$.

Solución: La dirección viene dada por los vectores

$$\overrightarrow{AB}(-1,-2,-3) \qquad \overrightarrow{AC}(1,3,5)$$

Ecuación Vectorial

$$\pi \equiv (x,y,z) = (2,3,5) + \lambda\,(-1,-2,-3) + \mu\,(1,3,5)$$

Ecuaciones Paramétricas

$$\left.\begin{array}{rcc} x &=& 2-\lambda+\mu \\ y &=& 3-2\,\lambda+3\,\mu \\ z &=& 5-3\,\lambda+5\,\mu \end{array}\right\}$$

Ecuación Cartesiana

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Se desarrolla por adjuntos por la primera fila

$$\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$$

□

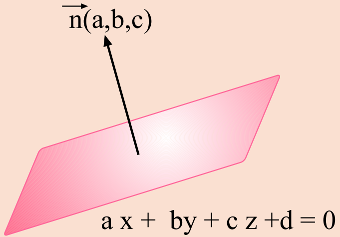
MATEMATICAS 2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
Rectas y Planos
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

En la ecuación general del plano:

$$\pi \equiv a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

los coeficientes (a, b, c) corresponden a las componentes del vector **perpendicular** al plano y se le denomina el vector **normal** del plano π.

$$\vec{\mathbf{n}}\,(a, b, c)$$



Ejemplo 3.2. Determinar las ecuaciones paramétricas del plano

$$\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$$

Solución: Elegimos dos variables libres como parámetros, por ejemplo $y = \lambda$ y $z = \mu$, quedando

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 1 + 2\,\lambda - \mu \\ y & = & \lambda \\ z & = & \mu \end{array} \right.$$

La dirección viene dada por los vectores

$$\vec{u}(2, 1, 0) \qquad \vec{v}(-1, 0, 1)$$

□

Ejercicio 4. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(2,0,1)$ y contiene a la recta de ecuación :

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$$

Ejercicio 5. Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto $A(1,0,0)$ y es perpendicular al plano $x - y - z + 2 = 0$.

Ejercicio 6. Determinar la ecuación de un plano que contenga a la recta r y sea perpendicular al plano π, siendo:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-1} \qquad \pi : \left\{ \begin{array}{ll} x & = \lambda - \mu \\ y & = \lambda \\ z & = \mu \end{array} \right.$$

Test. El punto $A(0,1,2)$ y los vectores $\vec{u}(1,2,3)$ y $\vec{v}(2,4,6)$ determinan un plano

(a) Si (b) No

Test. El punto $A(7,-4,2)$ y la recta $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z+1}{3}$ determinan un plano

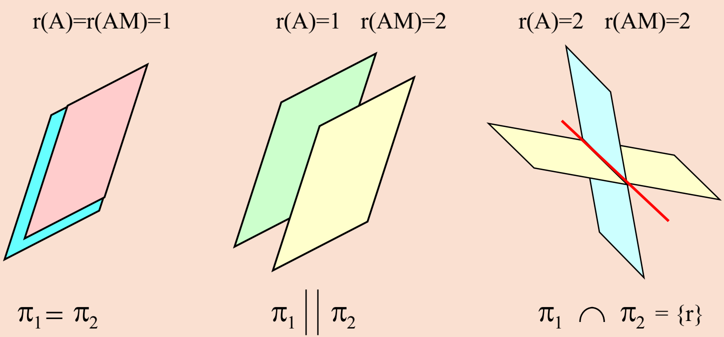
(a) Si (b) No

4. Posición relativa de dos planos

Teorema 4.1. Sean dos planos
$$\begin{array}{rcl}\pi_1 & \equiv & A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z = D_1\\ \pi_2 & \equiv & A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z = D_2\end{array}$$

Estudiamos el sistema lineal de 2 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccccc}\overbrace{A_1 \quad B_1 \quad C_1}^{A} & & D_1\\ A_2 \quad B_2 \quad C_2 & & D_2\end{array}\right)}_{AM}
\qquad
\begin{array}{llcc}
r(A)=1 & r(AM)=1 & \Rightarrow & \pi_1 \equiv \pi_2\\
r(A)=1 & r(AM)=2 & \Rightarrow & \pi_1 \parallel \pi_2\\
r(A)=2 & r(AM)=2 & \Rightarrow & \pi_1 \cap \pi_2 = \{r\}
\end{array}$$



◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 4.1. Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv \quad 3\,x - 2\,y + 4\,z = 2 \\ \pi_2 &\equiv \quad 2\,x + 3\,y - 5\,z = -8 \end{aligned}$$

Solución:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\begin{matrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \end{matrix}}^{A}} & \begin{matrix} 2 \\ -8 \end{matrix} \end{array}\right)}_{AM} \stackrel{3\,f_2 - 2\,f_1}{\equiv} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\begin{matrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 13 & -23 \end{matrix}}^{A}} & \begin{matrix} 2 \\ -28 \end{matrix} \end{array}\right)}_{AM}$$

Como $r(A) = r(AM) = 2$ los planos determinan una recta, $\pi_1 \cap \pi_2 = \{r\}$. Para hallar r resolvemos el sistema pasando z como variable libre. De la segunda ecuación $y = -\dfrac{28}{13} + \dfrac{23}{13}z$ y sustituyendo en la primera ecuación $x = -\dfrac{10}{13} - \dfrac{2}{13}z$, luego la recta es

$$\left\{ \begin{array}{lcr} x &=& -\dfrac{10}{13} - \dfrac{2}{13}\,\lambda \\ y &=& -\dfrac{28}{13} + \dfrac{23}{13}\,\lambda \\ z &=& \lambda \end{array} \right.$$

$\square$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 4.2. Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv \quad 3\,x - 2\,y + 4\,z = 1 \\ \pi_2 &\equiv \quad -6\,x + 4\,y - 8\,z = -2 \end{aligned}$$

Solución: Como

$$\frac{3}{-6} = \frac{-2}{4} = \frac{4}{-8} = \frac{1}{-2}$$

los planos son coincidentes. □

Ejemplo 4.3. Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv \quad 3\,x - 2\,y + 4\,z = 1 \\ \pi_2 &\equiv \quad -6\,x + 4\,y - 8\,z = 0 \end{aligned}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 4 & 1 \\ -6 & 4 & -8 & 0 \end{array} \right) \overset{f_2+2\,f_1}{\equiv} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Como $r(A) = 1 < r(AM) = 2$ los planos son paralelos. □

MaTEX
Rectas y Planos
Doc Doc
Volver Cerrar

4.1. Haz de planos

Definición 4.1 *Sea la recta r determinada por los planos π_1 y π_2.*

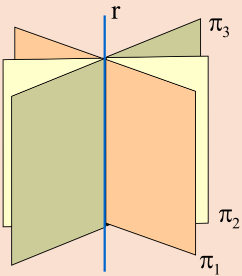
$$r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} \pi_1 & \equiv & A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z + D_1 = 0 \\ \pi_2 & \equiv & A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z + D_2 = 0 \end{array} \right.$$

llamamos haz de planos a los infinitos planos que pasan por r. Su expresión viene dada por:

$$\boxed{\alpha\,(A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z + D_1) + \beta\,(A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z + D_2) = 0}$$

La figura muestra el haz de planos. Se asemeja a un libro con infinitas hojas (los planos). Dando valores a los parámetros α y β no nulos a la vez, se obtienen los infinitos planos del haz.

$$\alpha\,\pi_1 + \beta\,\pi_2 = 0$$



Ejemplo 4.4. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2,-1,3)$ y contiene a la recta determinada por los planos:

$$\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x - y + z = 2 \\ \pi_2 \equiv 2\,x + y - z = -1 \end{array}$$

Solución: El plano buscado está en el haz

$$\alpha\,(x-\;y+\;z-2)+\beta\,(2\,x+\;y-\;z+1)=0$$

exigimos que pase por el punto $P(2,-1,3)$

$$\alpha\,(2+\;1+\;3-2)+\beta\,(2\,(2)-\;1-\;3+1)=0$$

es decir

$$4\,\alpha+\beta=0\Longrightarrow\beta=-4\alpha$$

Haciendo $\alpha=1\Longrightarrow\beta=-4$, y sustituyendo se obtiene

$$7\,x+5\,y-5\,z+6=0$$

$\square$

Ejercicio 7. Dada la recta r formada por π_1 y π_2:

$$\begin{aligned}\pi_1&\equiv\;x-\;y=2\\ \pi_2&\equiv y-\;z=1\end{aligned}$$

Hallar:

a) La expresión de todos los planos que la contienen.

b) El plano que contiene a r y pasa por el origen.

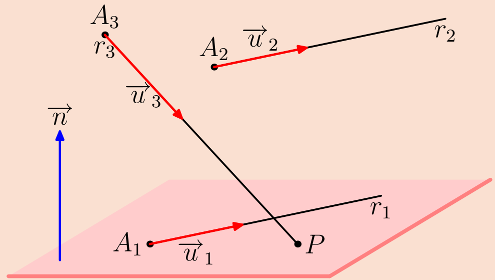
c) El plano que contiene a r y es paralelo $x-z=5$.

5. Posición relativa de recta y plano

Teorema 5.1. Sean la recta r y el plano π:

$$r \equiv \frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}$$
$$\pi \equiv a\,x + b\,y + c\,z = d$$

Para estudiar la posición relativa de la recta y el plano, se compara el vector de la recta $\vec{u}(u, v, w)$ con el vector normal $\vec{n}(a, b, c)$ del plano. Se pueden presentan tres casos:



1. $\vec{u}_1 \perp \vec{n}$ y $A_1 \in \pi \Rightarrow \quad r_1 \subset \pi$. Contenida.
2. $\vec{u}_2 \perp \vec{n}$ y $A_2 \notin \pi \Rightarrow \quad r_2 \parallel \pi$. Paralela.
3. $\vec{u}_3 \not\perp \vec{n} \quad \Rightarrow \quad r_3 \cap \pi = \{P\}$. Se cortan.

Ejemplo 5.1. Determinar b para que la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{b} = \frac{z}{6}$$

no corte al plano $\pi : 2x - 4y + 5z = 0$

Solución:
Para que r no corte al plano tiene que ser paralela, luego

$$\vec{u}(3, b, 6) \perp \vec{n}(2, -4, 5)$$

$$\vec{u}(3, b, 6) \cdot \vec{n}(2, -4, 5) = 0 = 36 - 4\,b = 0 \Longrightarrow \boxed{b = 9}$$

Si $b = 9$, $r \parallel \pi$, veamos que no esta contenida comprobando que no tienen un punto común. Tomamos $A(1, 2, 0) \in r$ y sustituimos en π.

$$2(1) - 4(2) + 5(0) = -6 \neq 0 \Longrightarrow r \parallel \pi$$

□

Ejercicio 8. Dados el plano $\pi : x + y + mz = n$, y la recta

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$$

a) Calcular m y n para que π contenga a r.

b) Calcular m y n para que π y r sean paralelos.

c) Calcular m y n para que π y r sean secantes.

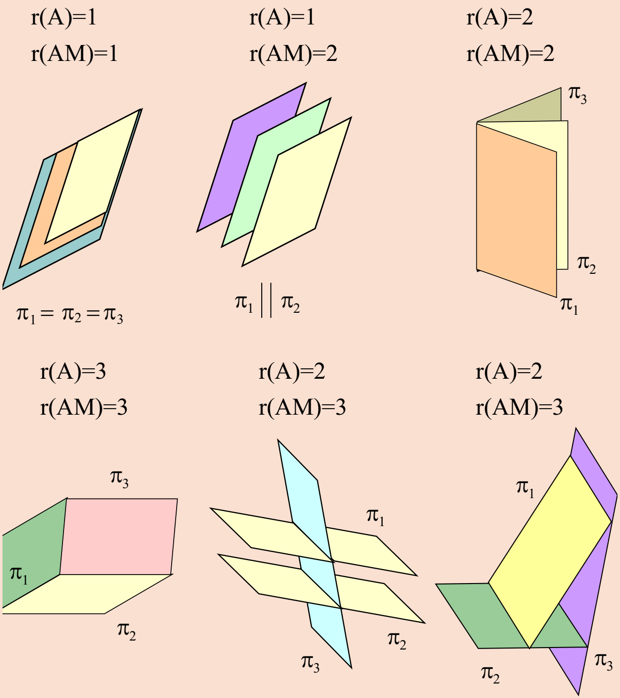
6. Posición relativa de tres planos

Sean los planos π_1,π_2, y π_3:

$$\begin{array}{lcl} \pi_1 & \equiv & A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z = D_1 \\ \pi_2 & \equiv & A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z = D_2 \\ \pi_3 & \equiv & A_3\,x + B_3\,y + C_3\,z = D_3 \end{array} \qquad \underbrace{\left(\overbrace{\begin{array}{ccc} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{array}}^{A} \quad \begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{array}\right)}_{AM}$$

Se analiza el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas discutiendo los rangos de las matrices A y la ampliada AM. Se pueden presentar los siguientes casos:

- $r(A) = 1$ $r(AM) = 1$, planos coincidentes.
- $r(A) = 1$ $r(AM) = 2$, planos paralelos.
- $r(A) = 2$ $r(AM) = 2$, Haz de planos, pudiendo haber dos de ellos coincidentes. Tienen una recta en común.
- $r(A) = 2$ $r(AM) = 3$, los 3 planos no tienen puntos comunes, pueden ser 2 paralelos que intersecan respectivamente al otro, o bien, se intersecan dos a dos en respectivas rectas.
- $r(A) = 3$ $r(AM) = 3$, los planos tienen un punto en común.


r(A)=1
r(AM)=1
$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$
r(A)=1
r(AM)=2
$\pi_1 \,||\, \pi_2$
r(A)=2
r(AM)=2
π_3
π_2
π_1
r(A)=3
r(AM)=3
π_3
π_1
π_2
r(A)=2
r(AM)=3
π_1
π_2
π_3
r(A)=2
r(AM)=3
π_1
π_2
π_3

Ejemplo 6.1. Discutir la posición relativa de los planos:

$$\left\{\begin{array}{lll}\alpha: & x+y+kz & =1\\ \beta: & kx+y+z & =1\\ \gamma: & 2x+y+z & =k\end{array}\right.$$

Solución: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2 = 0 \Longrightarrow k = 1 \vee \quad k = 2$

$$k=1 \quad \underbrace{\left(\overbrace{\begin{matrix}1&1&1\\1&1&1\\2&1&1\end{matrix}}^{A}\quad\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right)}_{AM} = \underbrace{\left(\overbrace{\begin{matrix}1&1&1\\0&0&0\\0&-1&-1\end{matrix}}^{A}\quad\begin{matrix}1\\0\\-1\end{matrix}\right)}_{AM} \Rightarrow \begin{array}{c}r(A)=2\\ r(AM)=2\\ \text{Haz de planos}\end{array}$$

$$k=2 \quad \underbrace{\left(\overbrace{\begin{matrix}1&1&2\\2&1&1\\2&1&1\end{matrix}}^{A}\quad\begin{matrix}1\\1\\2\end{matrix}\right)}_{AM} = \underbrace{\left(\overbrace{\begin{matrix}1&1&1\\0&-1&-3\\0&0&0\end{matrix}}^{A}\quad\begin{matrix}1\\-1\\1\end{matrix}\right)}_{AM} \Rightarrow \begin{array}{c}r(A)=2\\ r(AM)=3\\ \alpha\cap\beta=r_1\\ \alpha\cap\gamma=r_2\\ \beta \parallel \gamma\end{array}$$

Si $k \neq 1; 2$, $r(A) = r(AM) = 3$, S.C.D. y los tres planos se cortan en un punto. □

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 6.2. Discutir la posición relativa de los planos:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & - & z = & 2 \\ 3x & - & 2y & + & z = & 1 \\ 6x & + & y & - & 2z = & 7 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-6f_1]{f_2-3f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.$r(A) = r(AM) = 2$, S.C.I, los tres planos tienen una recta en común. □

Ejercicio 9. Dados los planos :

$$\left\{\begin{array}{lrl} \pi_\alpha : & 2x - ky - 4z & = 2 \\ \pi_\beta : & kx - y + z & = -3 \\ \pi_\gamma : & x + y + z & = 1 \end{array}\right.$$

1. ¿Para qué k, determinan π_α y π_β una recta, $r(k)$?.
2. Estudiar la posición relativa de las rectas $r(k)$, respecto del plano γ.

7. Posición relativa de dos rectas

Sean dos rectas cualesquiera

$$\mathbf{r} : A + \lambda \vec{u} \qquad \mathbf{s} : B + \mu \vec{v}$$

Las posibles posiciones relativas entre ellas son:

- **Rectas paralelas**

Dos rectas r y s son paralelas si tienen la misma dirección.

Ejemplo 7.1. Comprobar que las rectas r y s son paralelas:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3} \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$$

Solución: En efecto, los vectores $\vec{u}(1,1,3)$ y $\vec{v}(2,4,6)$ son proporcionales, luego r y s tienen la misma dirección. □

- **Rectas coincidentes**

Dos rectas r y s son coincidentes, si son paralelas y tienen un punto en común.

Ejemplo 7.2. Comprobar que las rectas r y s no son coincidentes:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3} \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$$

Solución: En efecto, por una parte, los vectores $\vec{u}(1,1,3)$ y $\vec{v}(2,4,6)$ son proporcionales, luego r y s son paralelas. Por otra parte como el punto $A(0,1,-3)$ de r no satisface la ecuación de s, pues

$$\frac{0}{2} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{-3}{6}$$

las rectas son paralelas pero no coincidentes. $\square$

- **Rectas que se cortan o se cruzan**

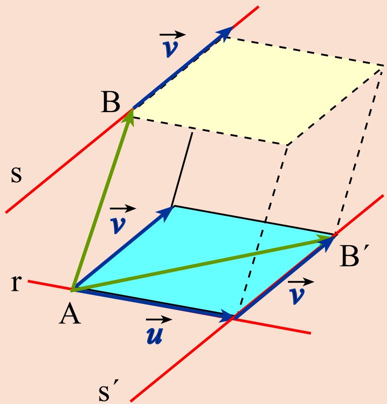
Si r y s no son paralelas hay dos posiciones de interés: que se corten o se cruzen en el espacio.(Observar el gráfico inferior)

Si las rectas se cortan forman un plano y los vectores $\vec{u}$,$\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son dependientes luego

$$det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}) = 0$$

y si se cruzan en el espacio los vectores $\vec{u}$,$\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son independientes luego

$$det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}) \neq 0$$



MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
Rectas y Planos
Doc Doc
Volver Cerrar

Ejemplo 7.3. Comprobar que las rectas r y s se cruzan en el espacio:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3} \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$$

Solución: En efecto, por una parte, los vectores $\vec{u}(1,1,3)$ y $\vec{v}(1,0,1)$ no son proporcionales, luego r y s no son paralelas. Formamos el vector $\overrightarrow{AB}(0,-1,3)$ y calculamos $det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB})$. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{ se cruzan}$$

$\square$

Ejemplo 7.4. Comprobar que las rectas r y s se cortan en el espacio:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3} \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$$

Solución: En efecto, por una parte, los vectores $\vec{u}(1,1,3)$ y $\vec{v}(1,0,1)$ no son proporcionales, luego r y s no son paralelas. Formamos el vector $\overrightarrow{AB}(-2,0,-2)$ y calculamos $det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB})$. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ se cortan}$$

también decimos que las rectas son incidentes, secantes o coplanarias. $\square$

Otra forma equivalente de estudiar la posición relativa de dos rectas es estudiar el rango de las matrices determinadas por los vectores $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$, pudiéndose presentar los siguientes casos:

Posición relativa de dos rectas

1. $\left.\begin{array}{c} r\{\vec{u},\vec{v}\} = 1 \\ r\{\vec{u},\vec{v},\vec{AB}\} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ **r** y **s** son coincidentes.
2. $\left.\begin{array}{c} r\{\vec{u},\vec{v}\} = 1 \\ r\{\vec{u},\vec{v},\vec{AB}\} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ **r** y **s** son paralelas.
3. $\left.\begin{array}{c} r\{\vec{u},\vec{v}\} = 2 \\ r\{\vec{u},\vec{v},\vec{AB}\} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ **r** y **s** se cortan.
4. $\left.\begin{array}{c} r\{\vec{u},\vec{v}\} = 2 \\ r\{\vec{u},\vec{v},\vec{AB}\} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ **r** y **s** se cruzan.

Ejercicio 10. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3} \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x + 3y + 7z - 6 = 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 11. Determinar a y b para que las rectas sean paralelas

$$r \equiv 4x = 2y + 6 = z \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x + ay - z = 1 \\ 2x + 3y + bz = 3 \end{array} \right.$$

Ejercicio 12. Hallar los valores de m y n para que las rectas r y s sean paralelas:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rl} x = & 5 + 5\lambda \\ y = & 3 + \lambda \\ z = & -\lambda \end{array} \right. \qquad s \equiv \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

Ejercicio 13. Estudiar según los valores del parámetro a, la posición relativa de las rectas r y s:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rl} x = & (a+2)\lambda \\ y = & 1 \\ z = & a \end{array} \right.$$

$$s \equiv \frac{a-x}{1} = \frac{y-2}{a^3} = \frac{z-a}{a-1}$$

Ejercicio 14. Estudiar la posición relativa de la recta:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} kx + y + z = k^2 \\ x + y + kz = k \end{array} \right.$$

y el plano $\alpha : x + y + 2kz = 2$, según los valores del parámetro real k.

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Para que estén alineados es necesario que los vectores

$$\overrightarrow{AB} = (3, 1, 2) \text{ y} \overrightarrow{AC} = (0, -2, 1)$$

sean proporcionales. Como

$$\frac{3}{0} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{2}{1}$$

los puntos no están alineados. Ejercicio 1

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
Rectas y Planos
Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 2. Exigimos que los vectores

$$\overrightarrow{AB} = (2-m, m-2, 4) \qquad \overrightarrow{AC} = (5-m, 1, 1)$$

sean proporcionales, es decir,

$$\frac{5-m}{2-m} = \frac{1}{m-2} = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{5-m}{2-m} & = & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{m-2} & = & \dfrac{1}{4} \end{array} \right. \Longrightarrow \mathbf{m = 6}$$

La ecuación de la recta AB, será:

$$r \equiv \frac{x-6}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{1}$$

Ejercicio 2

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 3. Para pasar r a paramétricas

$$r\left\{\begin{array}{rcl} x+y-3 & = & 0 \\ y-z-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

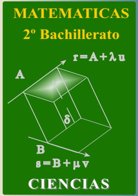
elegimos una variable como parámetro, por ejemplo $y=\lambda$, y tenemos:

$$r\left\{\begin{array}{rcc} x & = & 3-\lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & -1+\lambda \end{array}\right.$$

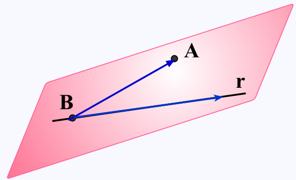
Luego un punto es $(3,0,-1)$ y su vector $(-1,1,1)$, y de aquí en forma continua queda

$$r \equiv \frac{x-3}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$$

Ejercicio 3



Ejercicio 4. El plano buscado contiene a A y a r luego tenemos dos puntos $A(2,0,1)$, $B(1,-3,0) \in r$ del plano y un vector $\vec{u} = (2,1,-1)$.



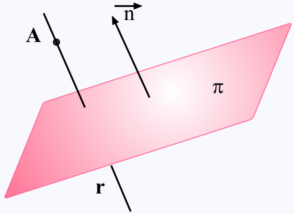
Con A y B formamos el otro vector direccional $\vec{AB} = (-1,-3,-1)$. La ecuación del plano será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv 4\,(x-2) - 3\,y + 5\,(z-1) = 0$$

Ejercicio 4

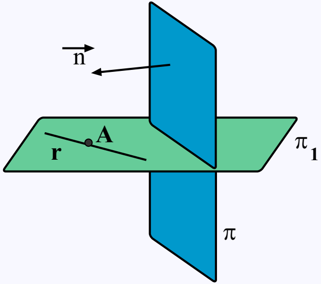
Ejercicio 5. La recta r buscada pasa por el punto $A(1,0,0)$, y tendrá como vector $\vec{u}$ el vector normal del plano $\vec{n} = (1,-1,-1)$.



$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$$

Ejercicio 5

Ejercicio 6. Del plano π_1 buscado tenemos:



- el punto $A(1,1,-1) \in r$
- el vector $\vec{u}(2,-3,-1)$ de r
- y el vector $\vec{n}$ de $\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - y + z = 0$:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4x - 3y + z + 8 = 0$$

Ejercicio 6

Ejercicio 7.

a) La expresión de todos los planos que la contienen es el haz de planos

$$\alpha\,(x-\ y-2)+\beta\,(y-\ z+1)=0 \qquad \alpha,\beta\in R$$

b) El plano del haz pasa por el origen, verifica

$$\alpha\,(0-\ 0-2)+\beta\,(0-\ 0+1)=0 \Longrightarrow \beta=2\,\alpha$$

con $\alpha=1$, se tiene $\beta=2$ y sustituyendo en la expresión del haz, $x+y-2\,z=0$

c) Hallamos el plano del haz con vector normal proporcional al vector normal de $x-z=5$. Asociando términos en el haz se tiene

$$\alpha\,x+(\beta-\alpha)\,y-\beta\,z-2\alpha+\beta=0$$

$$\frac{\alpha}{1}=\frac{\beta-\alpha}{0}=\frac{-\beta}{-1}\Longrightarrow \alpha=\beta$$

con $\alpha=1$, se tiene $\beta=1$ y sustituyendo en la expresión del haz, $x-z=1$

Ejercicio 7

Ejercicio 8.
Sean la recta y el plano:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2} \qquad \pi : x + y + mz = n$$

a) Calcular m y n para que π contenga a r. Es necesario que $\vec{u}(1,-1,1)$ sea ortogonal a $\vec{n}(1,1,m)$, luego

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = 0; (1,-1,1)\cdot(1,1,m) = 0 \Longrightarrow \boxed{m = 0}$$

y que el punto $A(0,2,0) \in r$ pertenezca al plano. Luego sustituyendo

$$(0) + (2) + m\,(0) = n \Longrightarrow \boxed{n = 2}$$

b) Calcular m y n para que π y r sean paralelos. Del apartado anterior r tiene que ser paralela sin puntos en común con π, luego $\boxed{m = 0 \quad n \neq 2}$.

c) Calcular m y n para que π y r sean secantes. Del apartado anterior r no tiene que ser paralela, luego $\boxed{m \neq 0}$

Ejercicio 8

Ejercicio 9. Los planos π_α y π_β determinan una recta siempre que no sean paralelos. Para que sean paralelos se tienen que cumplir:

$$\frac{2}{k} = \frac{-k}{-1} = \frac{-4}{1} \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{2}{k} & = & \dfrac{-k}{-1} \\ \dfrac{-k}{-1} & = & \dfrac{-4}{1} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{c} k = \pm\sqrt{2} \\ \\ k = -4 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Imposible}$$

luego $\forall\, k \in R \quad \pi_\alpha \cap \pi_\beta = r(k)$.

Ahora estudiamos la posición relativa de π_α , π_β y π_γ:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\begin{array}{ccc} 2 & -k & -4 \\ k & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}}^{A}} & & \begin{array}{c} 2 \\ -3 \\ 1 \end{array} \end{array} \right)}_{AM}$$

Como $\left| \begin{array}{ccc} 2 & -k & -4 \\ k & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = k^2 - 5k - 8.$

$|A| = 0 \Rightarrow k = \dfrac{5 \pm \sqrt{68}}{2}$. Por otra parte como un menor de AM,

$$\begin{vmatrix} -k & -4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4k + 4 \text{ se anula para } k = 1, \text{ se tiene}$$

$$\bullet\, k = \frac{5 \pm \sqrt{68}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} r(A) = 2 \\ r(AM) = 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad r(k)//\pi_\beta$$

$$\bullet\, k \neq \frac{5 \pm \sqrt{68}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} r(A) = 3 \\ r(AM) = 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \pi_\alpha \cap \pi_\beta \cap \pi_\gamma = \{\mathrm{P}\}$$

Ejercicio 9

Ejercicio 10. Obtenemos un punto $A \in \mathbf{r}$ y su vector $\vec{u}$

$$r \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3} \left\{ \begin{array}{l} A(3,-1,0) \\ \vec{u} = (5,2,-3) \end{array} \right.$$

Obtenemos un punto $B \in \mathbf{s}$ y su vector $\vec{v}$

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x + 3y + 7z - 6 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} y = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 4 \\ 3x + 7z = 6 \end{array} \right\} & & B(\frac{11}{2}, 0, -\frac{3}{2}) \\ \vec{v} = \left| \begin{array}{ccc} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 7 \end{array} \right| = & & \vec{v} = (-10,-4,6) \end{array} \right.$$

Como $\vec{v} = (-10,-4,6) \sim \vec{u} = (5,2,-3)$ son proporcionales las rectas r y s son paralelas. Por otra parte como $A(3,-1,0) \in r$ satisface las ecuaciones de s,entonces $A \in s$, y las rectas r y s son paralelas con un punto en común luego son coincidentes, $r \equiv s$ Ejercicio 10

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 11. Obtenemos el vector direccional $\vec{u}$ de r:

$$r \equiv 4x = 2y + 6 = z\,\} \qquad \left.\frac{x}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{4}\right\} \qquad \tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4})$$

Obtenemos el vector direccional $\vec{v}$ de s:

$$\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 2 & a & -1 \\ 2 & 3 & b \end{vmatrix} = \quad \tilde{\mathbf{v}} = (\mathbf{ab} + \mathbf{3}, -\mathbf{2b} - \mathbf{2}, \mathbf{6} - \mathbf{2a})$$

$$r || s \Longrightarrow \frac{ab+3}{1} = \frac{-2b-2}{2} = \frac{6-2a}{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{ab+3}{1} & = & \dfrac{6-2a}{4} \\ \dfrac{-2b-2}{2} & = & \dfrac{6-2a}{4} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{b} & = & -1/5 \\ \mathbf{a} & = & -5 \end{array} \right.$$

Ejercicio 11

Ejercicio 12. Para que r y s sean paralelas sus vectores deben ser proporcionales. Como $\vec{u}(5,3,-1)$ y $\vec{v}(m,3,n)$,

$$\frac{5}{m}=\frac{3}{3}=\frac{-1}{n}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{5}{m}=\dfrac{3}{3}\\ \dfrac{3}{3}=\dfrac{-1}{n}\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{r}m=5\\ n=-1\end{array}\right.$$

Ejercicio 12

Ejercicio 13. De r tenemos el punto $A(0,1,a)$ y el vector $\vec{u} = (a+2,0,0)$. De la recta s tenemos el punto $B(a,2,a)$ y el vector $\vec{v} = (-1,a^3,a-1)$. Para que sean paralelas $\vec{u} \sim \vec{v}$,luego

$$\frac{a+2}{-1} = \frac{0}{a^3} = \frac{0}{a-1} \Rightarrow a = -2$$

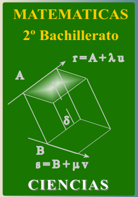
pero con $a = -2$, el vector $\vec{u} = (0,0,0)$ lo cual no puede ser. Luego no pueden ser paralelas. Veamos si pueden ser concurrentes. En este caso el determinante $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}| = 0$,

$$\begin{vmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ -1 & a^3 & a-1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow a = -2 \vee a = 1$$

Luego si $a = 1$, $r \cap s = \{P\}$. En resumen

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a = -2 & r & \text{no está definida} \\ a = 1 & r \cap s = \{P\} & \text{se cortan en un punto} \\ a \neq -2 \wedge 1 & \text{las rectas se cruzan} & \end{array} \right.$$

Ejercicio 13



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 14. Discutimos el sistema según los valores de k

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc} \overbrace{\begin{matrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 2k \end{matrix}}^{A} & \begin{matrix} k^2 \\ k \\ 2 \end{matrix} \end{array}\right)}_{AM} \Longrightarrow |A| = k(k-1) = 0 \Rightarrow k = 0 \vee k = 1$$

Discusión:

- $k = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \stackrel{f_3 - f_2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

  con $r(A) = 2$ y $r(AM) = 3$. Recta r paralela a π.

- $k = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  con $r(A) = 2$ y $r(AM) = 2$. Recta r contenida en el plano π.

- $k \neq 0 \wedge 1$, $r(A) = 3$ y $r(AM) = 3$. Sistema Compatible Determinado. Se cortan en un punto.

Ejercicio 14

Soluciones a los Tests

Solución al Test: Como los vectores $\vec{u}(1,2,3)$ y $\vec{v}(2,4,6)$ son proporcionales no son linealmente independientes. Luego no tenemos dirección para un plano que necesita dos vectores linealmente independientes. En este caso con estos datos tendríamos una recta. Final del Test

Solución al Test: El punto $A(7, -4, 2)$ y la recta

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+1}{3}$$

no determinan un plano pues el punto no es exterior a la recta ya que satisface su ecuación

$$\frac{7-2}{5} = \frac{-4+5}{1} = \frac{2+1}{3} = 1$$

Final del Test

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Índice alfabético