Resolución de Problemas del Bloque de Geometría

Geometría Analítica en el Espacio (II)

Ejercicio 52

IES O Couto

curso 2019-2020

Ejercicio 52

Se consideran los planos $\pi_1 : x + ky + z = k + 2$,
$\pi_2 : x + y + kz = -2(k + 1)$, $\pi_3 : kx + y + z = k$.

a) Determinar, según los valores de k, las posiciones relativas de los tres planos.

b) Para $k = -1$, hallar $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$

Apartado a)

El problema se reduce a discutir según los valores de k el sistema

$$\begin{cases} x + ky + z = k + 2 \\ x + y + kz = -2k - 2 \\ kx + y + z = k \end{cases}$$

Apartado a)

El problema se reduce a discutir según los valores de k el sistema

$$\begin{cases} x+ky+z=k+2 \\ x+y+kz=-2k-2 \\ kx+y+z=k \end{cases}$$

1. La matriz del sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con $|A|=k^3-3k+2$

   Por tanto, $|A|=(k-1)^2(k+2)=0 \iff k=1, k=-2$

Apartado a)

El problema se reduce a discutir según los valores de k el sistema

$$\begin{cases} x + ky + z = k + 2 \\ x + y + kz = -2k - 2 \\ kx + y + z = k \end{cases}$$

1. La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con $|A| = k^3 - 3k + 2$

   Por tanto, $|A| = (k-1)^2(k+2) = 0 \iff k = 1, k = -2$

   - Si $k \neq 1$ y $k \neq -2$, $rango(A) = 3 =$nº incógnitas.
     Por tanto, el sistema es compatible determinado, y tiene una única solución, que sería el punto $P \in \mathbb{R}^3$ en el que se intersecan los tres planos.

Apartado a)

El problema se reduce a discutir según los valores de k el sistema

$$\begin{cases} x + ky + z = k + 2 \\ x + y + kz = -2k - 2 \\ kx + y + z = k \end{cases}$$

1. La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con $|A| = k^3 - 3k + 2$

   Por tanto, $|A| = (k-1)^2(k+2) = 0 \iff k = 1, k = -2$

   - Si $k \neq 1$ y $k \neq -2$, $rango(A) = 3 =$nº incógnitas.
     Por tanto, el sistema es compatible determinado, y tiene una única solución, que sería el punto $P \in \mathbb{R}^3$ en el que se intersecan los tres planos.
   - $k = 1$:
     i) En A, todas las filas serían iguales, por tanto, $rango(A) = 1$

Apartado a)

El problema se reduce a discutir según los valores de k el sistema

$$\begin{cases} x + ky + z = k + 2 \\ x + y + kz = -2k - 2 \\ kx + y + z = k \end{cases}$$

1. La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con $|A| = k^3 - 3k + 2$

   Por tanto, $|A| = (k-1)^2(k+2) = 0 \iff k = 1, k = -2$

   - Si $k \neq 1$ y $k \neq -2$, $rango(A) = 3 =$nº incógnitas.
     Por tanto, el sistema es compatible determinado, y tiene una única solución, que sería el punto $P \in \mathbb{R}^3$ en el que se intersecan los tres planos.
   - $k = 1$:
     i) En A, todas las filas serían iguales, por tanto, $rango(A) = 1$
     ii) La matriz ampliada del sistema es $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Apartado a)

El problema se reduce a discutir según los valores de k el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x+ky+z=k+2 \\ x+y+kz=-2k-2 \\ kx+y+z=k \end{array}\right.$$

1. La matriz del sistema es $A=\begin{pmatrix}1 & k & 1\\ 1 & 1 & k\\ k & 1 & 1\end{pmatrix}$, con $|A|=k^3-3k+2$

   Por tanto, $|A|=(k-1)^2(k+2)=0 \iff k=1, k=-2$

   - Si $k\neq 1$ y $k\neq -2$, $rango(A)=3=$nº incógnitas.
     Por tanto, el sistema es compatible determinado, y tiene una única solución, que sería el punto $P\in\mathbb{R}^3$ en el que se intersecan los tres planos.
   - $k=1$:
     i) En A, todas las filas serían iguales, por tanto, $rango(A)=1$
     ii) La matriz ampliada del sistema es $A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & -4\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

     Como en A^* se tiene $\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -4\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$, $rango(A^*)=3$.

Apartado a)

El problema se reduce a discutir según los valores de k el sistema

$$\begin{cases} x + ky + z = k + 2 \\ x + y + kz = -2k - 2 \\ kx + y + z = k \end{cases}$$

1. La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con $|A| = k^3 - 3k + 2$

   Por tanto, $|A| = (k-1)^2(k+2) = 0 \iff k = 1, k = -2$

   - Si $k \neq 1$ y $k \neq -2$, $rango(A) = 3 =$nº incógnitas.
     Por tanto, el sistema es compatible determinado, y tiene una única solución, que sería el punto $P \in \mathbb{R}^3$ en el que se intersecan los tres planos.
   - $k = 1$:
     i) En A, todas las filas serían iguales, por tanto, $rango(A) = 1$
     ii) La matriz ampliada del sistema es $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
     Como en A^* se tiene $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, $rango(A^*) = 3$.
     iii) Es decir, el sistema es incompatible, y como los planos tienen todos el mismo vector normal, pero no hay dos con ecuaciones proporcionales, se trata de tres planos paralelos

- $k = -2$:

  i) Como en $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, $rango(A) = 2$

- $k=-2$:

i) Como en $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ se tiene $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$, $rango(A)=2$

ii) Como en $A^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ se tiene $\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & -2\end{vmatrix}=0$,
entonces $rango(A^*)=2$

- $k = -2$:

  i) Como en $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, $rango(A) = 2$

  ii) Como en $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ se tiene $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, entonces $rango(A^*) = 2$

  iii) Es decir, el sistema es compatible indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

- $k = -2$:

  i) Como en $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, $rango(A) = 2$

  ii) Como en $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ se tiene $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, entonces $rango(A^*) = 2$

  iii) Es decir, el sistema es compatible indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

  Al no haber dos planos con vectores normales proporcionales, no hay dos planos coincidentes. Es decir, se trata de tres planos diferentes que se intersecan todos ellos en una misma recta.

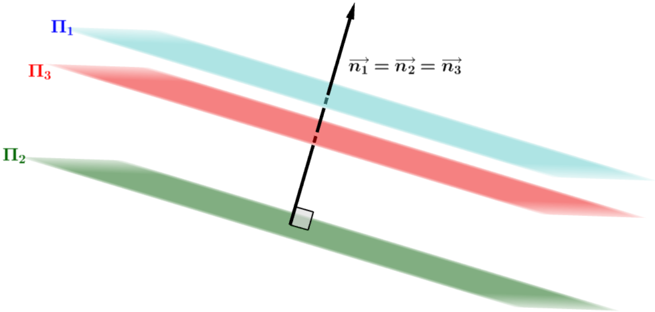

Imagen: $k = 1$
$\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \parallel \overrightarrow{n_3}$, $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \parallel \Pi_3$

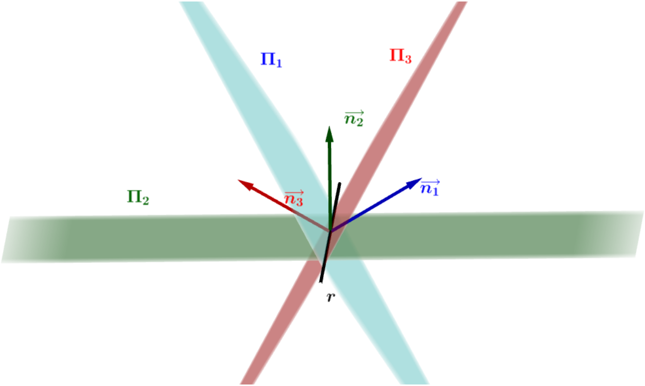

Imagen: $k = -2$

$\vec{n_2} = k_1 \vec{n_1} + k_3 \vec{n_3}$, $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = r$

Apartado b)

Hay que resolver el sistema compatible determinado

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x - y + z & = & 1 \\ x + y - z & = & 0 \\ -x + y + z & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x - y + z & = & 1 \\ x + y - z & = & 0 \\ -x + y + z & = & -1 \end{array} \right. \xrightarrow[F_3+F_1\to F_3]{F_2-F_1\to F_2} \left\{ \begin{array}{rcr} x - y + z & = & 1 \\ 2y - 2z & = & -1 \\ 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Apartado b)

Hay que resolver el sistema compatible determinado

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-y+z & = & 1 \\ x+y-z & = & 0 \\ -x+y+z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-y+z & = & 1 \\ x+y-z & = & 0 \\ -x+y+z & = & -1 \end{array}\right. \xrightarrow[F_3+F_1\to F_3]{F_2-F_1\to F_2} \left\{\begin{array}{rcr} x-y+z & = & 1 \\ 2y-2z & = & -1 \\ 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$z=0 \implies y=-\frac{1}{2} \implies x=\frac{3}{2}$$

Apartado b)

Hay que resolver el sistema compatible determinado

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-y+z & = & 1 \\ x+y-z & = & 0 \\ -x+y+z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-y+z & = & 1 \\ x+y-z & = & 0 \\ -x+y+z & = & -1 \end{array}\right. \xrightarrow[F_3+F_1\to F_3]{F_2-F_1\to F_2} \left\{\begin{array}{rcr} x-y+z & = & 1 \\ 2y-2z & = & -1 \\ 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$z=0 \implies y=-\frac{1}{2} \implies x=\frac{3}{2}$$

Es decir:

$$\Pi_1\cap\Pi_2\cap\Pi_3 = P = \left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$$