Resolución de Problemas del Bloque de Geometría

Geometría Analítica en el Espacio (II)

Ejercicio 49

IES O Couto

curso 2019-2020

Ejercicio 49

Dada la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 3 = 0 \\ y + 2z + 5 = 0 \end{array} \right.$, y el plano $\pi : x + y - z - 6 = 0$.

a) Determinar el punto P intersección de r y π, y el punto R de π más próximo al punto $Q = (6, -3, -1)$ de r.

b) Calcular el área del triángulo de vértices P, Q, y R.

Apartado a)

1. Para calcular P, hay que resolver el sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ y+2z=-5 \\ x+y-z=6 \end{cases}$

Apartado a)

1. Para calcular P, hay que resolver el sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ y+2z=-5 \\ x+y-z=6 \end{cases}$

   - La matriz del sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, con $|A| \neq 0$. Por tanto, el sistema es compatible determinado. Es decir, Π y r son secantes, siendo la solución del sistema las coordenadas del punto de corte.

Apartado a)

1. Para calcular P, hay que resolver el sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ y+2z=-5 \\ x+y-z=6 \end{cases}$

   - La matriz del sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, con $|A| \neq 0$. Por tanto, el sistema es compatible determinado. Es decir, Π y r son secantes, siendo la solución del sistema las coordenadas del punto de corte.
   - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1\rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Apartado a)

1. Para calcular P, hay que resolver el sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ y+2z=-5 \\ x+y-z=6 \end{cases}$

   - La matriz del sistema es $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, con $|A|\neq 0$. Por tanto, el sistema es compatible determinado. Es decir, Π y r son secantes, siendo la solución del sistema las coordenadas del punto de corte.
   - $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 6\end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1\to F_3} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$
   - Por tanto $r\cap\Pi = P = (2,1,-3)$

Apartado a)

1. Para calcular P, hay que resolver el sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ y+2z=-5 \\ x+y-z=6 \end{cases}$
   - La matriz del sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, con $|A| \neq 0$. Por tanto, el sistema es compatible determinado. Es decir, Π y r son secantes, siendo la solución del sistema las coordenadas del punto de corte.
   - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1\rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
   - Por tanto $r \cap \Pi = P = (2,1,-3)$
2. El punto $R \in \Pi$ se obtendrá como $R = s \cap \Pi$, siendo s la recta perpendicular a Π pasando por Q.

Apartado a)

1. Para calcular P, hay que resolver el sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ y+2z=-5 \\ x+y-z=6 \end{cases}$
    - La matriz del sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, con $|A| \neq 0$. Por tanto, el sistema es compatible determinado. Es decir, Π y r son secantes, siendo la solución del sistema las coordenadas del punto de corte.
    - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
    - Por tanto $r \cap \Pi = P = (2, 1, -3)$
2. El punto $R \in \Pi$ se obtendrá como $R = s \cap \Pi$, siendo s la recta perpendicular a Π pasando por Q.
    - El vector director de s es el vector normal a Π, $\overrightarrow{u_s} = (1, 1, -1)$. Por tanto:

Apartado a)

1. Para calcular P, hay que resolver el sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ y+2z=-5 \\ x+y-z=6 \end{cases}$
   - La matriz del sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, con $|A| \neq 0$. Por tanto, el sistema es compatible determinado. Es decir, Π y r son secantes, siendo la solución del sistema las coordenadas del punto de corte.
   - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
   - Por tanto $r \cap \Pi = P = (2,1,-3)$
2. El punto $R \in \Pi$ se obtendrá como $R = s \cap \Pi$, siendo s la recta perpendicular a Π pasando por Q.
   - El vector director de s es el vector normal a Π, $\overrightarrow{u_s} = (1,1,-1)$. Por tanto:

$$s: \begin{cases} x = 6+\lambda \\ y = -3+\lambda \\ z = -1-\lambda \end{cases}$$

Apartado a)

1. Para calcular P, hay que resolver el sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ y+2z=-5 \\ x+y-z=6 \end{cases}$
   - La matriz del sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, con $|A| \neq 0$. Por tanto, el sistema es compatible determinado. Es decir, Π y r son secantes, siendo la solución del sistema las coordenadas del punto de corte.
   - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
   - Por tanto $r \cap \Pi = P = (2, 1, -3)$
2. El punto $R \in \Pi$ se obtendrá como $R = s \cap \Pi$, siendo s la recta perpendicular a Π pasando por Q.
   - El vector director de s es el vector normal a Π, $\vec{u_s} = (1, 1, -1)$. Por tanto:

$$s : \begin{cases} x = 6+\lambda \\ y = -3+\lambda \\ z = -1-\lambda \end{cases}$$

   - $R \in s \implies R = (6+\lambda, -3+\lambda, -1-\lambda)$

Apartado a)

1. Para calcular P, hay que resolver el sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ y+2z=-5 \\ x+y-z=6 \end{cases}$

   - La matriz del sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, con $|A| \neq 0$. Por tanto, el sistema es compatible determinado. Es decir, Π y r son secantes, siendo la solución del sistema las coordenadas del punto de corte.
   - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
   - Por tanto $r \cap \Pi = P = (2,1,-3)$

2. El punto $R \in \Pi$ se obtendrá como $R = s \cap \Pi$, siendo s la recta perpendicular a Π pasando por Q.

   - El vector director de s es el vector normal a Π, $\overrightarrow{u_s}=(1,1,-1)$. Por tanto:

$$s: \begin{cases} x=6+\lambda \\ y=-3+\lambda \\ z=-1-\lambda \end{cases}$$

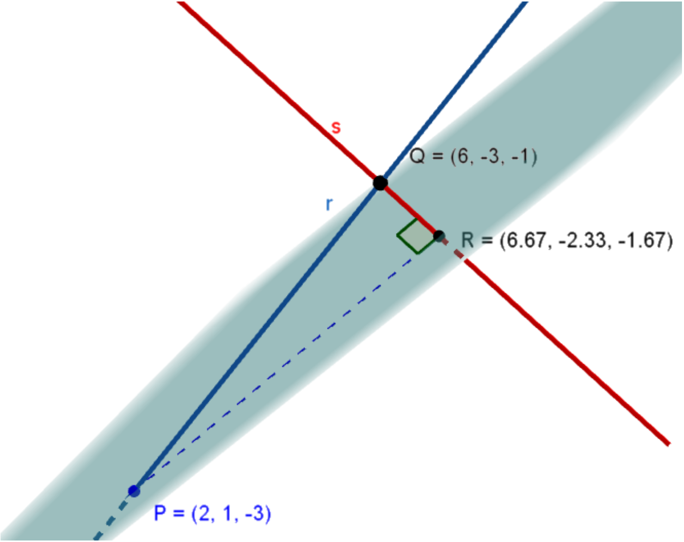
   - $R \in s \implies R=(6+\lambda,-3+\lambda,-1-\lambda)$
     $R \in \Pi \implies 6+\lambda-3+\lambda-(-1-\lambda)=6 \implies \lambda=\frac{2}{3}$

Apartado a)

1. Para calcular P, hay que resolver el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x+y=3 \\ y+2z=-5 \\ x+y-z=6 \end{array} \right.$
   - La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, con $|A| \neq 0$. Por tanto, el sistema es compatible determinado. Es decir, Π y r son secantes, siendo la solución del sistema las coordenadas del punto de corte.
   - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
   - Por tanto $r \cap \Pi = P = (2, 1, -3)$
2. El punto $R \in \Pi$ se obtendrá como $R = s \cap \Pi$, siendo s la recta perpendicular a Π pasando por Q.
   - El vector director de s es el vector normal a Π, $\overrightarrow{u_s} = (1, 1, -1)$. Por tanto:

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x = 6 + \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right.$$

   - $R \in s \implies R = (6 + \lambda, -3 + \lambda, -1 - \lambda)$
     $R \in \Pi \implies 6 + \lambda - 3 + \lambda - (-1 - \lambda) = 6 \implies \lambda = \frac{2}{3}$
     Por tanto, $R = \left(\frac{20}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right)$


s
Q = (6, -3, -1)
r
R = (6.67, -2.33, -1.67)
P = (2, 1, -3)

Apartado b)

- En general, el área del triángulo determinado por tres puntos no alineados P, Q, y R viene dada por

$$\text{Área}\,(\Delta\, PQR) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ}|$$

Apartado b)

- En general, el área del triángulo determinado por tres puntos no alineados P, Q, y R viene dada por

$$\text{Área}\,(\Delta\, PQR) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ}|$$

- En este caso, como por construcción $\overrightarrow{RP} \perp \overrightarrow{RQ}$, podemos directamente obtener:

$$\text{Área}\,(\Delta\, PQR) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{RP}||\overrightarrow{RQ}|$$

Apartado b)

- En general, el área del triángulo determinado por tres puntos no alineados P, Q, y R viene dada por

$$\text{Área}\,(\Delta\, PQR) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ}|$$

- En este caso, como por construcción $\overrightarrow{RP} \perp \overrightarrow{RQ}$, podemos directamente obtener:

$$\text{Área}\,(\Delta\, PQR) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{RP}||\overrightarrow{RQ}|$$

Donde:

$$|\overrightarrow{RP}| = \sqrt{\left(2 - \frac{20}{3}\right)^2 + \left(1 + \frac{7}{3}\right)^2 + \left(-3 + \frac{5}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{78}}{3}\ u$$

$$|\overrightarrow{RQ}| = \sqrt{\left(6 - \frac{20}{3}\right)^2 + \left(-3 + \frac{7}{3}\right)^2 + \left(-1 + \frac{5}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u$$

Apartado b)

- En general, el área del triángulo determinado por tres puntos no alineados P, Q, y R viene dada por

$$\text{Área}\,(\Delta\, PQR) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ}|$$

- En este caso, como por construcción $\overrightarrow{RP} \perp \overrightarrow{RQ}$, podemos directamente obtener:

$$\text{Área}\,(\Delta\, PQR) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{RP}||\overrightarrow{RQ}|$$

Donde:

$$|\overrightarrow{RP}| = \sqrt{\left(2-\frac{20}{3}\right)^2+\left(1+\frac{7}{3}\right)^2+\left(-3+\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{78}}{3}\,u$$

$$|\overrightarrow{RQ}| = \sqrt{\left(6-\frac{20}{3}\right)^2+\left(-3+\frac{7}{3}\right)^2+\left(-1+\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,u$$

- Por tanto $\text{Área}\,(\Delta\, PQR) = \dfrac{2\sqrt{26}}{3}\,u^2$