Resolución de Problemas del Bloque de Geometría

Geometría Analítica en el Espacio (II)

Ejercicio 48

IES O Couto

curso 2019-2020

BY NC SA

Silvia Fdez. Carballo

INFO ABOUT RIGHTS

2 003143 305368

www.safecreative.org/work

Ejercicio 48

Dada $r : \begin{cases} x = 1 \\ 3y - 4z = 18 \end{cases}$.

a) Hallar la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por $A = (1, -1, 1)$, y calcular $P = r \cap s$.

b) Hallar la distancia d entre A y P, y obtener los puntos de r cuya distancia a P es $2d$. Llamando Q a uno cualquiera de estos puntos, obtener las coordenadas del cuarto vértice del rectángulo determinado por A, P y Q.

Apartado a)

- La recta r tiene ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 + \frac{4}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$. Es decir, pasa por $R = (1, 6, 0)$ con vector director $\overline{u_r} = (0, \frac{4}{3}, 1)$. Por comodidad trabajaremos con $\overrightarrow{u_r} = (0, 4, 3)$

Apartado a)

- La recta r tiene ecuaciones paramétricas $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 6 + \frac{4}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$. Es decir, pasa por $R = (1, 6, 0)$ con vector director $\overline{u_r} = (0, \frac{4}{3}, 1)$. Por comodidad trabajaremos con $\overrightarrow{u_r} = (0, 4, 3)$
- La recta s tendrá vector director $\overrightarrow{u_S} = \overrightarrow{AP}$, con $P = \left(1, 6 + \frac{4}{3}\lambda, \lambda\right) \in r$ y $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{u_r}$:

Apartado a)

- La recta r tiene ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 + \frac{4}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$. Es decir, pasa por $R = (1, 6, 0)$ con vector director $\overline{u_r} = (0, \frac{4}{3}, 1)$. Por comodidad trabajaremos con $\overrightarrow{u_r} = (0, 4, 3)$
- La recta s tendrá vector director $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{AP}$, con $P = \left(1, 6 + \frac{4}{3}\lambda, \lambda\right) \in r$ y $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{u_r}$:

$$\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{AP} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

Apartado a)

- La recta r tiene ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 + \frac{4}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$. Es decir, pasa por $R = (1, 6, 0)$ con vector director $\overline{u_r} = (0, \frac{4}{3}, 1)$. Por comodidad trabajaremos con $\overrightarrow{u_r} = (0, 4, 3)$
- La recta s tendrá vector director $\overrightarrow{u_S} = \overrightarrow{AP}$, con $P = \left(1, 6 + \frac{4}{3}\lambda, \lambda\right) \in r$ y $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{u_r}$:

$$\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{AP} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$(0, 4, 3) \cdot \left(0, 7 + \frac{4}{3}\lambda, \lambda - 1\right) = 0 \Longleftrightarrow 28 + \frac{16}{3}\lambda + 3\lambda - 3 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -3$$

Apartado a)

- La recta r tiene ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 + \frac{4}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$. Es decir, pasa por $R = (1, 6, 0)$ con vector director $\overline{u_r} = (0, \frac{4}{3}, 1)$. Por comodidad trabajaremos con $\overrightarrow{u_r} = (0, 4, 3)$
- La recta s tendrá vector director $\overrightarrow{u_S} = \overrightarrow{AP}$, con $P = \left(1, 6 + \frac{4}{3}\lambda, \lambda\right) \in r$ y $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{u_r}$:

$$\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{AP} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$(0, 4, 3) \cdot \left(0, 7 + \frac{4}{3}\lambda, \lambda - 1\right) = 0 \Longleftrightarrow 28 + \frac{16}{3}\lambda + 3\lambda - 3 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -3$$

- Por tanto, s pasa por $A = (1, -1, 1)$ con vector director $\overrightarrow{u_s} = (0, 3, -4)$:

$$s : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$$

Apartado a)

- La recta r tiene ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 + \frac{4}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$. Es decir, pasa por $R = (1, 6, 0)$ con vector director $\overline{u_r} = (0, \frac{4}{3}, 1)$. Por comodidad trabajaremos con $\overrightarrow{u_r} = (0, 4, 3)$
- La recta s tendrá vector director $\overrightarrow{u_S} = \overrightarrow{AP}$, con $P = \left(1, 6 + \frac{4}{3}\lambda, \lambda\right) \in r$ y $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{u_r}$:

$$\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{AP} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$(0, 4, 3) \cdot \left(0, 7 + \frac{4}{3}\lambda, \lambda - 1\right) = 0 \Longleftrightarrow 28 + \frac{16}{3}\lambda + 3\lambda - 3 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -3$$

- Por tanto, s pasa por $A = (1, -1, 1)$ con vector director $\overrightarrow{u_s} = (0, 3, -4)$:

$$s : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$$

- Por construcción $r \cap s = P = (1, 2, -3)$

Apartado b)

- $d(A, P) = |\overrightarrow{AP}| = 5\,u$

Apartado b)

- $d(A,P) = |\overrightarrow{AP}| = 5\ u$
- Los puntos $Q \in r$ que verifican $d(P,Q) = 10$ u son de la forma $Q = \left(1, 6 + \frac{4}{3}\lambda, \lambda\right)$ verificando $|\overrightarrow{PQ}| = 10$ u:

Apartado b)

- $d(A, P) = |\overrightarrow{AP}| = 5\ u$
- Los puntos $Q \in r$ que verifican $d(P, Q) = 10$ u son de la forma $Q = \left(1, 6 + \frac{4}{3}\lambda, \lambda\right)$ verificando $|\overrightarrow{PQ}| = 10$ u:

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\left(0, 4 + \frac{4}{3}\lambda, 3 + \lambda\right)| = 10 \Longleftrightarrow \sqrt{\left(4 + \frac{4}{3}\lambda\right)^2 + (\lambda + 3)^2} = 10$$

Apartado b)

- $d(A, P) = |\overrightarrow{AP}| = 5\ u$
- Los puntos $Q \in r$ que verifican $d(P, Q) = 10$ u son de la forma $Q = \left(1, 6 + \frac{4}{3}\lambda, \lambda\right)$ verificando $|\overrightarrow{PQ}| = 10$ u:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(0, 4 + \frac{4}{3}\lambda, 3 + \lambda\right)\right| = 10 \Longleftrightarrow \sqrt{\left(4 + \frac{4}{3}\lambda\right)^2 + (\lambda + 3)^2} = 10$$

$$16 + \frac{32}{3}\lambda + \frac{16}{9}\lambda^2 + \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 100 \Longleftrightarrow 25 + \frac{50}{3}\lambda + \frac{25}{9}\lambda^2 = 100$$

Apartado b)

- $d(A,P) = |\overrightarrow{AP}| = 5\ u$
- Los puntos $Q \in r$ que verifican $d(P,Q) = 10$ u son de la forma $Q = \left(1, 6 + \frac{4}{3}\lambda, \lambda\right)$ verificando $|\overrightarrow{PQ}| = 10$ u:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(0, 4 + \frac{4}{3}\lambda, 3 + \lambda\right)\right| = 10 \Longleftrightarrow \sqrt{\left(4 + \frac{4}{3}\lambda\right)^2 + (\lambda+3)^2} = 10$$

$$16 + \frac{32}{3}\lambda + \frac{16}{9}\lambda^2 + \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 100 \Longleftrightarrow 25 + \frac{50}{3}\lambda + \frac{25}{9}\lambda^2 = 100$$

$$\lambda^2 + 6\lambda - 27 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = -9, \lambda_2 = 3$$

Apartado b)

- $d(A,P) = |\overrightarrow{AP}| = 5\ u$
- Los puntos $Q \in r$ que verifican $d(P,Q) = 10$ u son de la forma $Q = \left(1, 6 + \frac{4}{3}\lambda, \lambda\right)$ verificando $|\overrightarrow{PQ}| = 10$ u:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(0, 4 + \frac{4}{3}\lambda, 3 + \lambda\right)\right| = 10 \iff \sqrt{\left(4 + \frac{4}{3}\lambda\right)^2 + (\lambda + 3)^2} = 10$$

$$16 + \frac{32}{3}\lambda + \frac{16}{9}\lambda^2 + \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 100 \iff 25 + \frac{50}{3}\lambda + \frac{25}{9}\lambda^2 = 100$$

$$\lambda^2 + 6\lambda - 27 = 0 \iff \lambda_1 = -9, \lambda_2 = 3$$

Obtenemos los puntos:

$$Q_1 = (1, -6, -9)$$

$$Q_2 = (1, 10, 3)$$

Obtendremos dos rectángulos: APQ_1B_1 y APQ_2B_2. Los vértices B_1 y B_2 verificarán las ecuaciones vectoriales:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PQ_1} = \overrightarrow{PB_1}$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PQ_2} = \overrightarrow{PB_2}$$

Obtendremos dos rectángulos: APQ_1B_1 y APQ_2B_2. Los vértices B_1 y B_2 verificarán las ecuaciones vectoriales:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PQ_1} = \overrightarrow{PB_1}$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PQ_2} = \overrightarrow{PB_2}$$

- Cálculo de B_1:

$$\overrightarrow{PB_1} = (0, -3, 4) + (0, -8, -6) = (0, -11 - 2) \implies$$

$$\implies B_1 = P + (0, -11, -2) = (1, -9, -5)$$

Obtendremos dos rectángulos: APQ_1B_1 y APQ_2B_2. Los vértices B_1 y B_2 verificarán las ecuaciones vectoriales:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PQ_1} = \overrightarrow{PB_1}$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PQ_2} = \overrightarrow{PB_2}$$

- Cálculo de B_1:

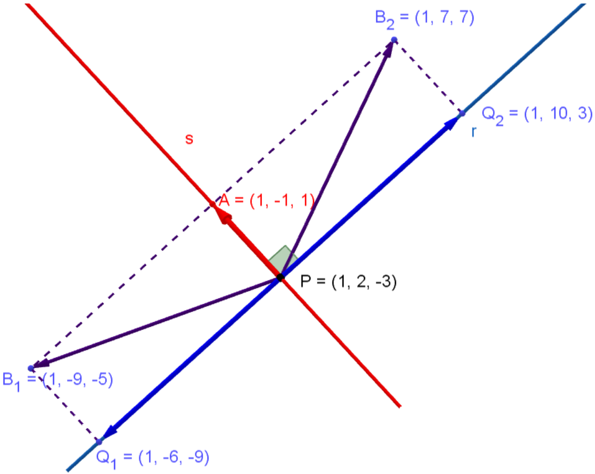
$$\overrightarrow{PB_1} = (0, -3, 4) + (0, -8, -6) = (0, -11 - 2) \implies$$

$$\implies B_1 = P + (0, -11, -2) = (1, -9, -5)$$

- Cálculo de B_2:

$$\overrightarrow{PB_2} = (0, -3, 4) + (0, 8, 6) = (0, 5, 10) \implies$$

$$\implies B_2 = P + (0, 5, 10) = (1, 7, 7)$$


B$_2$ = (1, 7, 7)
Q$_2$ = (1, 10, 3)
r
s
A = (1, -1, 1)
P = (1, 2, -3)
B$_1$ = (1, -9, -5)
Q$_1$ = (1, -6, -9)