Resolución de Problemas del Bloque de Geometría

Geometría Analítica en el Espacio (II)

Ejercicio 45

IES O Couto

curso 2019-2020

Ejercicio 45

Dados los planos $\pi_1 : x + y + z = -3$ y $\pi_2 : \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 - \mu \end{cases}$, y la recta $r : \frac{x-3}{2} = y = \frac{z-3}{3}$

a) Determinar la posición relativa de π_1 y π_2, y el ángulo que forman o la distancia entre ellos según sean secantes o paralelos.

b) Determinar la posición relativa de r y π_1, y la de r y π_2, y la distancia de la recta a los planos, o el ángulo que forma con cada uno de ellos según sea secante o paralela a los mismos.

c) Determinar un punto de r que equidiste de π_1 y π_2.

Apartado a)

- El vector normal de Π_1 es $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, 1)$

Apartado a)

- El vector normal de Π_1 es $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, 1)$
- Los vectores directores de Π_2 son $\overrightarrow{v_1} = (1, -1, 0)$ y $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, -1)$. Por tanto, el vector normal de Π_2 es $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$

$$\overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

Apartado a)

- El vector normal de Π_1 es $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, 1)$
- Los vectores directores de Π_2 son $\overrightarrow{v_1} = (1, -1, 0)$ y $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, -1)$. Por tanto, el vector normal de Π_2 es $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$

$$\overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

- Dado que $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$, los planos son paralelos o coincidentes.

Apartado a)

- El vector normal de Π_1 es $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, 1)$
- Los vectores directores de Π_2 son $\overrightarrow{v_1} = (1, -1, 0)$ y $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, -1)$. Por tanto, el vector normal de Π_2 es $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$

$$\overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

- Dado que $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$, los planos son paralelos o coincidentes.
- Elegimos $B = (-3, 0, -6) \in \Pi_2$. Veamos si satisface la ecuación de Π_1:

$$-3 + 0 + (-6) = -9 \neq -3$$

Apartado a)

- El vector normal de Π_1 es $\overrightarrow{n_1} = (1,1,1)$
- Los vectores directores de Π_2 son $\overrightarrow{v_1} = (1,-1,0)$ y $\overrightarrow{v_2} = (0,1,-1)$. Por tanto, el vector normal de Π_2 es $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$

$$\overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

- Dado que $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$, los planos son paralelos o coincidentes.
- Elegimos $B = (-3,0,-6) \in \Pi_2$. Veamos si satisface la ecuación de Π_1:

$$-3 + 0 + (-6) = -9 \neq -3$$

$B \notin \Pi_1 \implies \Pi_1$ y Π_2 son paralelos

Apartado a)

- El vector normal de Π_1 es $\overrightarrow{n_1} = (1,1,1)$
- Los vectores directores de Π_2 son $\overrightarrow{v_1} = (1,-1,0)$ y $\overrightarrow{v_2} = (0,1,-1)$. Por tanto, el vector normal de Π_2 es $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$

$$\overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

- Dado que $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$, los planos son paralelos o coincidentes.
- Elegimos $B = (-3,0,-6) \in \Pi_2$. Veamos si satisface la ecuación de Π_1:

$$-3 + 0 + (-6) = -9 \neq -3$$

$B \notin \Pi_1 \implies \Pi_1$ y Π_2 son paralelos

- $d(\Pi_1,\Pi_2) = d(B,\Pi_1) = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_1}|}{|\overrightarrow{n_1}|}$ con $A \in \Pi_1$.

Apartado a)

- El vector normal de Π_1 es $\overrightarrow{n_1} = (1,1,1)$
- Los vectores directores de Π_2 son $\overrightarrow{v_1} = (1,-1,0)$ y $\overrightarrow{v_2} = (0,1,-1)$. Por tanto, el vector normal de Π_2 es $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$

$$\overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

- Dado que $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$, los planos son paralelos o coincidentes.
- Elegimos $B = (-3,0,-6) \in \Pi_2$. Veamos si satisface la ecuación de Π_1:

$$-3 + 0 + (-6) = -9 \neq -3$$

$B \not\in \Pi_1 \implies \Pi_1$ y Π_2 son paralelos

- $d(\Pi_1, \Pi_2) = d(B, \Pi_1) = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_1}|}{|\overrightarrow{n_1}|}$ con $A \in \Pi_1$.

  Tomando $A = (0,0,-3) \in \Pi_1$, se tiene

$$d(\Pi_1, \Pi_2) = \frac{|(-3,0,-3) \cdot (1,1,1)|}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\, u$$

Apartado b)

1. Posición relativa de r y Π_1:

Apartado b)

1. Posición relativa de r y Π_1:
   - El vector director de r es $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, 3)$.

Apartado b)

1. Posición relativa de r y Π_1:
   - El vector director de r es $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, 3)$.
   - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_1} = (2, 1, 3) \cdot (1, 1, 1) = 6 \neq 0 \implies \overrightarrow{u_r} \not\perp \overrightarrow{n_1} \implies r \cap \Pi_1 = P \in \mathbb{R}^3$. Es decir, r y Π_1 se cortan.

Apartado b)

1. Posición relativa de r y Π_1:
   - El vector director de r es $\overrightarrow{u_r} = (2,1,3)$.
   - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_1} = (2,1,3)\cdot(1,1,1) = 6 \neq 0 \implies \overrightarrow{u_r} \not\perp \overrightarrow{n_1} \implies r \cap \Pi_1 = P \in \mathbb{R}^3$. Es decir, r y Π_1 se cortan.
   - El ángulo que forman se deduce del complementario del ángulo (agudo) formado por las direcciones de $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{u_r}$. Este último se deduce del producto escalar de los vectores.

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_1} = |\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{n_1}| \cos\alpha \implies 6 = \sqrt{3}\sqrt{14}\cos\alpha \implies \cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{42}} \implies$$

$$\alpha = 22'21^\circ$$

Apartado b)

1. Posición relativa de r y Π_1:
   - El vector director de r es $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, 3)$.
   - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_1} = (2, 1, 3) \cdot (1, 1, 1) = 6 \neq 0 \implies \overrightarrow{u_r} \not\perp \overrightarrow{n_1} \implies r \cap \Pi_1 = P \in \mathbb{R}^3$. Es decir, r y Π_1 se cortan.
   - El ángulo que forman se deduce del complementario del ángulo (agudo) formado por las direcciones de $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{u_r}$. Este último se deduce del producto escalar de los vectores.

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_1} = |\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{n_1}| \cos\alpha \implies 6 = \sqrt{3}\sqrt{14} \cos\alpha \implies \cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{42}} \implies$$

$$\alpha = 22'21^\circ$$

Por tanto:

$$\angle(r, \Pi_1) = 90^\circ - 22'21^\circ = 67'79^\circ$$

Apartado b)

1. Posición relativa de r y Π_1:
   - El vector director de r es $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, 3)$.
   - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_1} = (2, 1, 3) \cdot (1, 1, 1) = 6 \neq 0 \implies \overrightarrow{u_r} \not\perp \overrightarrow{n_1} \implies r \cap \Pi_1 = P \in \mathbb{R}^3$. Es decir, r y Π_1 se cortan.
   - El ángulo que forman se deduce del complementario del ángulo (agudo) formado por las direcciones de $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{u_r}$. Este último se deduce del producto escalar de los vectores.

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_1} = |\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{n_1}| \cos \alpha \implies 6 = \sqrt{3}\sqrt{14} \cos \alpha \implies \cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{42}} \implies$$

$$\alpha = 22'21^\circ$$

   Por tanto:

$$\angle(r, \Pi_1) = 90^\circ - 22'21^\circ = 67'79^\circ$$

2. Posición relativa de r y Π_2:

Apartado b)

1. Posición relativa de r y Π_1:
   - El vector director de r es $\overrightarrow{u_r} = (2,1,3)$.
   - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_1} = (2,1,3)\cdot(1,1,1) = 6 \neq 0 \implies \overrightarrow{u_r} \not\perp \overrightarrow{n_1} \implies r \cap \Pi_1 = P \in \mathbb{R}^3$. Es decir, r y Π_1 se cortan.
   - El ángulo que forman se deduce del complementario del ángulo (agudo) formado por las direcciones de $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{u_r}$. Este último se deduce del producto escalar de los vectores.

     $$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_1} = |\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{n_1}| \cos\alpha \implies 6 = \sqrt{3}\sqrt{14}\cos\alpha \implies \cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{42}} \implies$$

     $$\alpha = 22'21^\circ$$

     Por tanto:

     $$\angle(r, \Pi_1) = 90^\circ - 22'21^\circ = 67'79^\circ$$

2. Posición relativa de r y Π_2:
   - Por ser $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ entonces r y Π_2 también son secantes.

Apartado b)

1. Posición relativa de r y Π_1:
   - El vector director de r es $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, 3)$.
   - $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_1} = (2, 1, 3) \cdot (1, 1, 1) = 6 \neq 0 \implies \overrightarrow{u_r} \not\perp \overrightarrow{n_1} \implies r \cap \Pi_1 = P \in \mathbb{R}^3$. Es decir, r y Π_1 se cortan.
   - El ángulo que forman se deduce del complementario del ángulo (agudo) formado por las direcciones de $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{u_r}$. Este último se deduce del producto escalar de los vectores.

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_1} = |\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{n_1}| \cos\alpha \implies 6 = \sqrt{3}\sqrt{14}\cos\alpha \implies \cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{42}} \implies$$

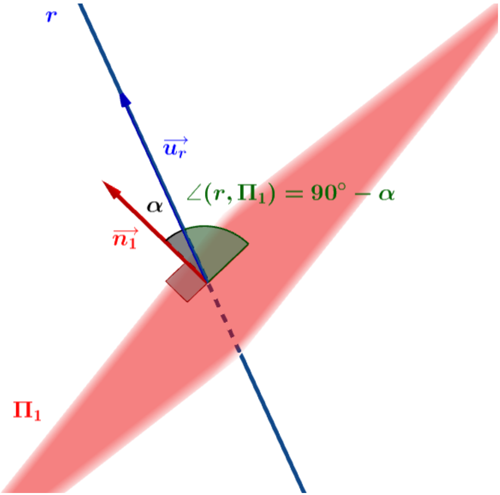
$$\alpha = 22'21^\circ$$

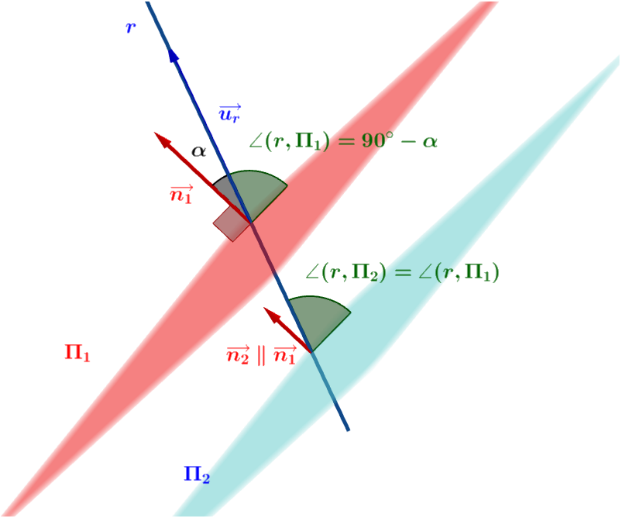
Por tanto:

$$\angle(r, \Pi_1) = 90^\circ - 22'21^\circ = 67'79^\circ$$

2. Posición relativa de r y Π_2:
   - Por ser $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ entonces r y Π_2 también son secantes.
   - Por cuestiones de paralelismo:

$$\angle(r, \Pi_2) = 67'79^\circ$$


r
$\overrightarrow{u_r}$
α
$\angle(r, \Pi_1) = 90^\circ - \alpha$
$\overrightarrow{n_1}$
Π_1


r
$\vec{u_r}$
α
$\angle(r, \Pi_1) = 90^\circ - \alpha$
$\vec{n_1}$
$\angle(r, \Pi_2) = \angle(r, \Pi_1)$
Π_1
$\vec{n_2} \parallel \vec{n_1}$
Π_2

Apartado c)

- La ecuación implícita de Π_2 es

$$\Pi_2 : \begin{vmatrix} x+3 & y & z+6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \Pi_2 : x+3+y+z+6=0$$

$$\Pi_2 : x+y+z+9=0$$

Apartado c)

- La ecuación implícita de Π_2 es

$$\Pi_2 : \begin{vmatrix} x+3 & y & z+6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \Pi_2 : x+3+y+z+6=0$$

$$\Pi_2 : x+y+z+9=0$$

- Las ecuaciones paramétricas de r son $\left\{ \begin{array}{l} x = 3+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3+3\lambda \end{array} \right.$

Apartado c)

- La ecuación implícita de Π_2 es

$$\Pi_2 : \begin{vmatrix} x+3 & y & z+6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \Pi_2 : x+3+y+z+6=0$$

$$\Pi_2 : x+y+z+9=0$$

- Las ecuaciones paramétricas de r son $\left\{ \begin{array}{l} x = 3+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3+3\lambda \end{array} \right.$

- Un punto genérico de r es de la forma $R=(3+2\lambda, \lambda, 3+3\lambda)$. Tenemos que encontrar el valor de λ para que $d(R, \Pi_1) = d(R, \Pi_2)$

$$\left. \begin{array}{l} d(R, \Pi_1) = \dfrac{|3+2\lambda+\lambda+3+3\lambda+3|}{\sqrt{3}} \\ d(R, \Pi_2) = \dfrac{|3+2\lambda+\lambda+3+3\lambda+9|}{\sqrt{3}} \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |3+2\lambda+\lambda+3+3\lambda+3| = |3+2\lambda+\lambda+3+3\lambda+9|$$

$$|3+2\lambda+\lambda+3+3\lambda+3| = |3+2\lambda+\lambda+3+3\lambda+9| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |9+6\lambda| = |15+6\lambda| \Longrightarrow 9+6\lambda = \pm(15+6\lambda) \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 9+6\lambda = 15+6\lambda \\ 9+6\lambda = -15-6\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 9 = 15 \text{ absurdo!} \\ 12\lambda = -24 \end{array}\right.$$

Por tanto: $\lambda = -2$

$$|3+2\lambda+\lambda+3+3\lambda+3| = |3+2\lambda+\lambda+3+3\lambda+9| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |9+6\lambda| = |15+6\lambda| \Longrightarrow 9+6\lambda = \pm(15+6\lambda) \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 9+6\lambda = 15+6\lambda \\ 9+6\lambda = -15-6\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 9 = 15 \text{ absurdo!} \\ 12\lambda = -24 \end{array}\right.$$

Por tanto: $\lambda = -2$
Es decir, $R = (-1, -2, -3)$