Resolución de Problemas del Bloque de Geometría

Geometría Analítica en el Espacio (II)

Ejercicio 36

IES O Couto

curso 2019-2020

Ejercicio 36

Hallar la distancia entre la recta r que pasa por $A = (2, -1, 1)$ y $B = (6, 8, 0)$, y la recta s que pasa por $C = (2, 1, 2)$ y $D = (0, 2, 1)$, y determinar la ecuación de la recta perpendicular a ambas y que se apoya en ellas.

Estudio de la posición relativa de r y s

Debemos estudiar primero la posición relativa de las rectas r y s.

Estudio de la posición relativa de r y s

Debemos estudiar primero la posición relativa de las rectas r y s.

- r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (4, 9, -1)$

Estudio de la posición relativa de r y s

Debemos estudiar primero la posición relativa de las rectas r y s.

- r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (4, 9, -1)$
- s tiene por vector director $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{CD} = (-2, 1, -1)$

Estudio de la posición relativa de r y s

Debemos estudiar primero la posición relativa de las rectas r y s.

- r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (4, 9, -1)$
- s tiene por vector director $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{CD} = (-2, 1, -1)$
- Como $\overrightarrow{u_r} \not\parallel \overrightarrow{u_s}$, debemos determinar si $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{u_r}$, y $\overrightarrow{u_s}$ son coplanarios:

$$[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = | \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} | = 18 + 6 + 12 - 2 = 34 \neq 0$$

Estudio de la posición relativa de r y s

Debemos estudiar primero la posición relativa de las rectas r y s.

- r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (4, 9, -1)$
- s tiene por vector director $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{CD} = (-2, 1, -1)$
- Como $\overrightarrow{u_r} \nparallel \overrightarrow{u_s}$, debemos determinar si $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{u_r}$, y $\overrightarrow{u_s}$ son coplanarios:

$$[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = | \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} | = 18 + 6 + 12 - 2 = 34 \neq 0$$

Por tanto, r y s se cruzan.

Cálculo de la perpendicular común

Lo más intuitivo resultaría caracterizar dicha recta (a la que llamaremos t) como aquella que pasa por los puntos P y Q verificando:

$$P \in r, \;\; \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$Q \in s, \;\; \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{CD}$$

Cálculo de la perpendicular común

Lo más intuitivo resultaría caracterizar dicha recta (a la que llamaremos t) como aquella que pasa por los puntos P y Q verificando:

$$P \in r, \ \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$Q \in s, \ \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{CD}$$

Determinados P y Q, podría darse fácilmente una ecuación de t, y además la distancia $d(r, s)$ vendría dada por $|\overrightarrow{PQ}|$

Cálculo de la perpendicular común

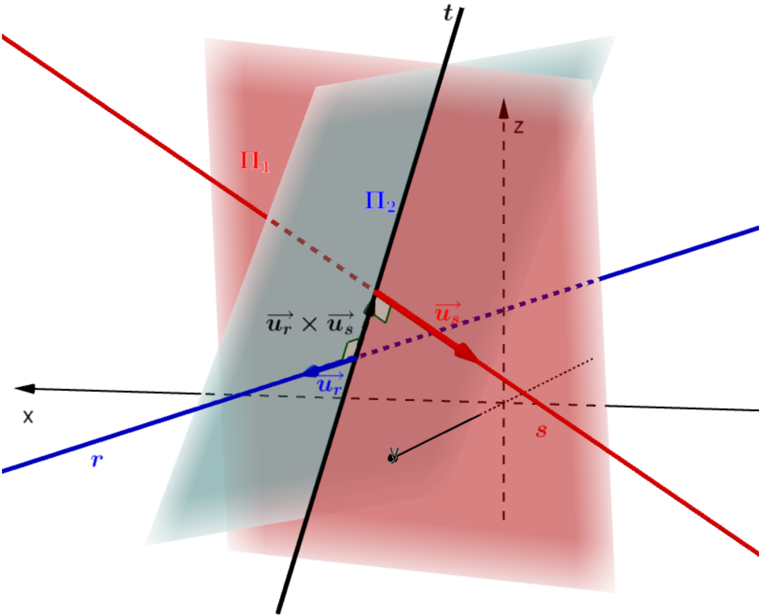
Lo más intuitivo resultaría caracterizar dicha recta (a la que llamaremos t) como aquella que pasa por los puntos P y Q verificando:

$$P \in r, \;\; \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$Q \in s, \;\; \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{CD}$$

Determinados P y Q, podría darse fácilmente una ecuación de t, y además la distancia $d(r,s)$ vendría dada por $|\overrightarrow{PQ}|$
El problema es que la determinación de las coordenadas de P y Q puede suponer cálculos incómodos. Por eso, la estrategia más eficiente es determinar t como la intersección de los planos Π_1 y Π_2, tales que:

- Π_1 contiene a r, y tiene por vectores directores $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$
- Π_2 contiene a s, y tiene por vectores directores $\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$


t
z
Π_1
Π_2
$\vec{u_r} \times \vec{u_s}$
$\vec{u_s}$
$\vec{u_r}$
x
s
r

1. Cálculo de Π_1:

1. Cálculo de Π_1:
   - r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (4, 9, -1)$

1. Cálculo de Π_1:
   - r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (4, 9, -1)$
   - s tiene por vector director $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{CD} = (-2, 1, -1)$

1. Cálculo de Π_1:
    - r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (4, 9, -1)$
    - s tiene por vector director $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{CD} = (-2, 1, -1)$
    - El vector $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$ es

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & 9 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-8, 6, 22)$$

1. Cálculo de Π_1:
   - r tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (4, 9, -1)$
   - s tiene por vector director $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{CD} = (-2, 1, -1)$
   - El vector $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$ es

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & 9 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-8, 6, 22)$$

   - El plano Π_1 pasa por A, con vectores directores $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$. Para cualquier punto $P = (x, y, z) \in \Pi_1$ se verifica que $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$ son coplanarios.

$$\Pi_1 : [\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi_1 : \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 4 & 9 & -1 \\ -8 & 6 & 22 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Pi_1 : 204(x-2) - 80(y+1) + 96(z-1) = 0$$

$$\Pi_1 : 51x - 20y + 24z - 146 = 0$$

2. Cálculo de Π_2:

2. Cálculo de Π_2:
   - s tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{CD} = (-2, 1, -1)$

2. Cálculo de Π_2:
   - s tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{CD} = (-2, 1, -1)$
   - El plano Π_2 pasa por D, con vectores directores $\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$. Para cualquier punto $P = (x, y, z) \in \Pi_2$ se verifica que $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$ son coplanarios.

$$\Pi_2 : [\overrightarrow{DP}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi_2 : \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -8 & 6 & 22 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Pi_2 : 28x + 52(y-2) - 4(z-1) = 0$$
$$\Pi_2 : 7x + 13y - z + 25 = 0$$

2. Cálculo de Π_2:
   - s tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{CD} = (-2, 1, -1)$
   - El plano Π_2 pasa por D, con vectores directores $\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$. Para cualquier punto $P = (x, y, z) \in \Pi_2$ se verifica que $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$ son coplanarios.

$$\Pi_2 : [\overrightarrow{DP}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi_2 : \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -8 & 6 & 22 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Pi_2 : 28x + 52(y-2) - 4(z-1) = 0$$
$$\Pi_2 : 7x + 13y - z + 25 = 0$$

3. La ecuación de la recta t resulta:

$$t : \begin{cases} 51x - 20y + 24z - 146 = 0 \\ 7x + 13y - z + 25 = 0 \end{cases}$$

2. Cálculo de Π_2:
   - s tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{CD} = (-2, 1, -1)$
   - El plano Π_2 pasa por D, con vectores directores $\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$. Para cualquier punto $P = (x, y, z) \in \Pi_2$ se verifica que $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$ son coplanarios.

$$\Pi_2 : [\overrightarrow{DP}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}] = 0 \iff \Pi_2 : \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -8 & 6 & 22 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Pi_2 : 28x + 52(y-2) - 4(z-1) = 0$$

$$\Pi_2 : 7x + 13y - z + 25 = 0$$

3. La ecuación de la recta t resulta:

$$t : \begin{cases} 51x - 20y + 24z - 146 = 0 \\ 7x + 13y - z + 25 = 0 \end{cases}$$

4. La distancia entre ambas rectas es $d(r, s) = \dfrac{|[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$

- $|[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = |\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}| = |18 + 6 + 12 - 2| = 34$

- $|[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]| = |\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}| = |18+6+12-2| = 34$
- $|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |2(-4,3,11)| = 2\sqrt{146}$

- $|[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = \left| \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = |18 + 6 + 12 - 2| = 34$
- $|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |2(-4, 3, 11)| = 2\sqrt{146}$

Por tanto:

$$d(r, s) = \frac{34}{2\sqrt{146}} = \frac{17\sqrt{146}}{146}$$