Resolución de Problemas del Bloque de Geometría

Geometría Analítica en el Espacio (II)

Ejercicio 33

IES O Couto

curso 2019-2020

Ejercicio 33

Dadas las rectas $r : \begin{cases} ax - y = 2a + 2 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} by - 2z = b \\ x + y = 2 \end{cases}$

a) Calcular los valores de a y b para que sean paralelas, y para dichos valores, la ecuación del plano π que las contiene.

b) Para los valores encontrados, si se apoya un cubo por una de sus caras sobre el plano π, de forma que una arista está sobre r, y la otra sobre s, calcula el volumen del cubo.

Apartado a)

1. Para que las rectas sean paralelas, sus vectores directores han de ser proporcionales:

Apartado a)

1. Para que las rectas sean paralelas, sus vectores directores han de ser proporcionales:
    - La recta r tiene por vector director a $\overline{u_r} = (a, -1, 0) \times (2, 0, -1)$:

Apartado a)

1. Para que las rectas sean paralelas, sus vectores directores han de ser proporcionales:
   - La recta r tiene por vector director a $\overline{u_r} = (a, -1, 0) \times (2, 0, -1)$:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overline{k} \\ a & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, a, 2)$$

Apartado a)

1. Para que las rectas sean paralelas, sus vectores directores han de ser proporcionales:
   - La recta r tiene por vector director a $\overline{u_r} = (a, -1, 0) \times (2, 0, -1)$:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overline{k} \\ a & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, a, 2)$$

   - La recta s tiene por vector director a $\overrightarrow{u_s} = (0, b, -2) \times (1, 1, 0)$:

Apartado a)

1. Para que las rectas sean paralelas, sus vectores directores han de ser proporcionales:
   - La recta r tiene por vector director a $\overline{u_r} = (a, -1, 0) \times (2, 0, -1)$:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overline{k} \\ a & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, a, 2)$$

   - La recta s tiene por vector director a $\overrightarrow{u_s} = (0, b, -2) \times (1, 1, 0)$:

$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & b & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2, -2, -b)$$

Apartado a)

1. Para que las rectas sean paralelas, sus vectores directores han de ser proporcionales:
   - La recta r tiene por vector director a $\overline{u_r} = (a, -1, 0) \times (2, 0, -1)$:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overline{k} \\ a & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, a, 2)$$

   - La recta s tiene por vector director a $\overrightarrow{u_s} = (0, b, -2) \times (1, 1, 0)$:

$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & b & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2, -2, -b)$$

   - $\overrightarrow{u_r} = k\overrightarrow{u_s} \iff \dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{-2} = \dfrac{2}{-b}$

Apartado a)

1. Para que las rectas sean paralelas, sus vectores directores han de ser proporcionales:
   - La recta r tiene por vector director a $\overline{u_r} = (a, -1, 0) \times (2, 0, -1)$:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overline{k} \\ a & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, a, 2)$$

   - La recta s tiene por vector director a $\overrightarrow{u_s} = (0, b, -2) \times (1, 1, 0)$:

$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & b & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2, -2, -b)$$

   - $\overrightarrow{u_r} = k\overrightarrow{u_s} \iff \dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{-2} = \dfrac{2}{-b}$
   - Por tanto:

$$a = -1, \; b = -4$$

2. Ahora hay que comprobar que para $a = -1$ y $b = -4$ las rectas no son coincidentes:

2. Ahora hay que comprobar que para $a = -1$ y $b = -4$ las rectas no son coincidentes:
   - $r : \begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$, y $s : \begin{cases} -4y - 2z = -4 \\ x + y = 2 \end{cases}$

2. Ahora hay que comprobar que para $a = -1$ y $b = -4$ las rectas no son coincidentes:
   - $r : \left\{ \begin{array}{l} -x - y = 0 \\ 2x - z = 3 \end{array} \right.$, y $s : \left\{ \begin{array}{l} -4y - 2z = -4 \\ x + y = 2 \end{array} \right.$
   - Si $x = 0$, entonces se tiene $P = (0, 0, -3) \in r$. Pero P no satisface la ecuación de s, por tanto, r y s son paralelas

2. Ahora hay que comprobar que para $a = -1$ y $b = -4$ las rectas no son coincidentes:
   - $r : \begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$, y $s : \begin{cases} -4y - 2z = -4 \\ x + y = 2 \end{cases}$
   - Si $x = 0$, entonces se tiene $P = (0, 0, -3) \in r$. Pero P no satisface la ecuación de s, por tanto, r y s son paralelas
3. El plano Π que contiene a r y s puede darse buscando dos puntos más, uno en cada recta:

2. Ahora hay que comprobar que para $a = -1$ y $b = -4$ las rectas no son coincidentes:
   - $r : \begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$, y $s : \begin{cases} -4y - 2z = -4 \\ x + y = 2 \end{cases}$
   - Si $x = 0$, entonces se tiene $P = (0, 0, -3) \in r$. Pero P no satisface la ecuación de s, por tanto, r y s son paralelas
3. El plano Π que contiene a r y s puede darse buscando dos puntos más, uno en cada recta:
   - En r, si $x = 1$ se tiene $R = (1, -1, -1) \in r$

2. Ahora hay que comprobar que para $a = -1$ y $b = -4$ las rectas no son coincidentes:
   - $r : \left\{ \begin{array}{l} -x - y = 0 \\ 2x - z = 3 \end{array} \right.$, y $s : \left\{ \begin{array}{l} -4y - 2z = -4 \\ x + y = 2 \end{array} \right.$
   - Si $x = 0$, entonces se tiene $P = (0, 0, -3) \in r$. Pero P no satisface la ecuación de s, por tanto, r y s son paralelas
3. El plano Π que contiene a r y s puede darse buscando dos puntos más, uno en cada recta:
   - En r, si $x = 1$ se tiene $R = (1, -1, -1) \in r$
   - En s, si $y = 0$ se tiene $S = (2, 0, 2) \in s$

2. Ahora hay que comprobar que para $a=-1$ y $b=-4$ las rectas no son coincidentes:
   - $r:\left\{\begin{array}{l} -x-y=0 \\ 2x-z=3 \end{array}\right.$, y $s:\left\{\begin{array}{l} -4y-2z=-4 \\ x+y=2 \end{array}\right.$
   - Si $x=0$, entonces se tiene $P=(0,0,-3)\in r$. Pero P no satisface la ecuación de s, por tanto, r y s son paralelas
3. El plano Π que contiene a r y s puede darse buscando dos puntos más, uno en cada recta:
   - En r, si $x=1$ se tiene $R=(1,-1,-1)\in r$
   - En s, si $y=0$ se tiene $S=(2,0,2)\in s$
   - Para cualquier punto $A=(x,y,z)\in\Pi$ se cumple que $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PR}$, y $\overrightarrow{PS}$ son coplanarios:

2. Ahora hay que comprobar que para $a = -1$ y $b = -4$ las rectas no son coincidentes:
    - $r : \begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$, y $s : \begin{cases} -4y - 2z = -4 \\ x + y = 2 \end{cases}$
    - Si $x = 0$, entonces se tiene $P = (0, 0, -3) \in r$. Pero P no satisface la ecuación de s, por tanto, r y s son paralelas
3. El plano Π que contiene a r y s puede darse buscando dos puntos más, uno en cada recta:
    - En r, si $x = 1$ se tiene $R = (1, -1, -1) \in r$
    - En s, si $y = 0$ se tiene $S = (2, 0, 2) \in s$
    - Para cualquier punto $A = (x, y, z) \in \Pi$ se cumple que $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PR}$, y $\overrightarrow{PS}$ son coplanarios:

$$\Pi : \begin{vmatrix} x & y & z+3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \Pi : -5x - y + 2z + 6 = 0$$

Apartado b)

- El lado del cubo es la distancia entre r y s:

Apartado b)

- El lado del cubo es la distancia entre r y s:

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} \quad P \in r,\ S \in s$$

Apartado b)

- El lado del cubo es la distancia entre r y s:

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} \quad P \in r,\ S \in s$$

- $\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (5, 1, -2) \implies |\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{u_r}| = \sqrt{30}$

Apartado b)

- El lado del cubo es la distancia entre r y s:

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} \quad P \in r,\ S \in s$$

- $\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (5, 1, -2) \implies |\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{u_r}| = \sqrt{30}$
- $|\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{6}$

Apartado b)

- El lado del cubo es la distancia entre r y s:

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} \quad P \in r,\ S \in s$$

- $\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (5, 1, -2) \implies |\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{u_r}| = \sqrt{30}$
- $|\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{6}$
- Por tanto:

$$d(r,s) = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}\, u$$

Apartado b)

- El lado del cubo es la distancia entre r y s:

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} \quad P \in r,\ S \in s$$

- $\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (5, 1, -2) \implies |\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{u_r}| = \sqrt{30}$
- $|\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{6}$
- Por tanto:

$$d(r,s) = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}\, u$$

- Es decir, el volumen del cubo es:

$$V = 5\sqrt{5}\, u^3$$

Interpretación geométrica de la distancia de un punto a una recta

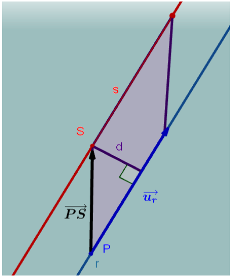
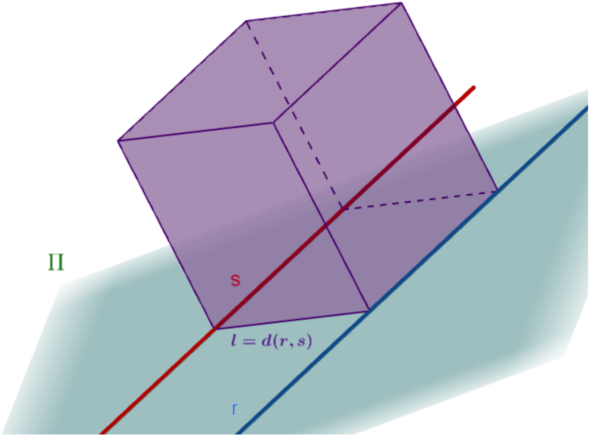


Imagen: $d = d(r,s)$

El área del paralelogramo determinado por $\vec{u_r}$ y $\vec{PS}$ es $|\vec{PS} \times \vec{u_r}|$, y también la longitud de la base del paralelogramo, $|\vec{u_r}|$, por la altura d.

Es decir: $|\vec{PS} \times \vec{u_r}| = d \cdot |\vec{u_r}| \implies d(r,s) = d = \dfrac{|\vec{PS} \times \vec{u_r}|}{|\vec{u_r}|}$


Π
s
$l = d(r, s)$
r