Resolución de Problemas del Bloque de Geometría

Geometría Analítica en el Espacio (II)
Ejercicio 31

IES O Couto

curso 2019-2020

Ejercicio 31

Dadas las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x+z=1 \\ y=0 \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} 2x=1 \\ z=k \end{array} \right.$ determinar las posiciones relativas en función de k, y la distancia entre ellas cuando se cruzan.

1. Estudio de la posición relativa de r y s

1. Estudio de la posición relativa de r y s
   - r pasa por $R = (0,0,1)$, con vector director $\overrightarrow{u_r} = (1,0,1) \times (0,1,0)$.

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,0,1)$$

1. Estudio de la posición relativa de r y s
   - r pasa por $R=(0,0,1)$, con vector director $\overrightarrow{u_r}=(1,0,1)\times(0,1,0)$.
   $$\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-1,0,1)$$
   - s pasa por $S=\left(\frac{1}{2},0,k\right)$, con vector director $\overrightarrow{u_s}=(2,0,0)\times(0,0,1)$.
   $$\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(0,2,0)$$

1. Estudio de la posición relativa de r y s
    - r pasa por $R=(0,0,1)$, con vector director $\overrightarrow{u_r}=(1,0,1)\times(0,1,0)$.
    $$\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-1,0,1)$$
    - s pasa por $S=\left(\frac{1}{2},0,k\right)$, con vector director $\overrightarrow{u_s}=(2,0,0)\times(0,0,1)$.
    $$\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(0,2,0)$$
    - Dado que $\overrightarrow{u_r}\nparallel\overrightarrow{u_s}$, entonces $\forall\, k\in\mathbb{R}$, las rectas r y s se cortan o se cruzan.

1. Estudio de la posición relativa de r y s
    - r pasa por $R = (0, 0, 1)$, con vector director $\overrightarrow{u_r} = (1, 0, 1) \times (0, 1, 0)$.
    $$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1)$$
    - s pasa por $S = \left(\frac{1}{2}, 0, k\right)$, con vector director $\overrightarrow{u_s} = (2, 0, 0) \times (0, 0, 1)$.
    $$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, 2, 0)$$
    - Dado que $\overrightarrow{u_r} \not\parallel \overrightarrow{u_s}$, entonces $\forall\, k \in \mathbb{R}$, las rectas r y s se cortan o se cruzan.
    - Las rectas r y s se cortan si y solo si $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{u_r}$, y $\overrightarrow{u_s}$ son coplanarios. Es decir, si y solo si $[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = 0$

1. Estudio de la posición relativa de r y s
   - r pasa por $R=(0,0,1)$, con vector director $\overrightarrow{u_r}=(1,0,1)\times(0,1,0)$.
     $$\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-1,0,1)$$
   - s pasa por $S=\left(\frac{1}{2},0,k\right)$, con vector director $\overrightarrow{u_s}=(2,0,0)\times(0,0,1)$.
     $$\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(0,2,0)$$
   - Dado que $\overrightarrow{u_r}\nparallel\overrightarrow{u_s}$, entonces $\forall\, k\in\mathbb{R}$, las rectas r y s se cortan o se cruzan.
   - Las rectas r y s se cortan si y solo si $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{u_r}$, y $\overrightarrow{u_s}$ son coplanarios. Es decir, si y solo si $[\overrightarrow{RS},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]=0$
     $$\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 0 & k-1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=0\iff -2(k-1)-1=0\iff$$
     $$\iff -2k+2-1=0\iff k=\frac{1}{2}$$

1. Estudio de la posición relativa de r y s
   - r pasa por $R=(0,0,1)$, con vector director $\overrightarrow{u_r}=(1,0,1)\times(0,1,0)$.
   $$\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-1,0,1)$$
   - s pasa por $S=\left(\frac{1}{2},0,k\right)$, con vector director $\overrightarrow{u_s}=(2,0,0)\times(0,0,1)$.
   $$\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(0,2,0)$$
   - Dado que $\overrightarrow{u_r}\nparallel\overrightarrow{u_s}$, entonces $\forall\, k\in\mathbb{R}$, las rectas r y s se cortan o se cruzan.
   - Las rectas r y s se cortan si y solo si $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{u_r}$, y $\overrightarrow{u_s}$ son coplanarios. Es decir, si y solo si $[\overrightarrow{RS},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]=0$

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 0 & k-1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=0\iff -2(k-1)-1=0\iff$$

$$\iff -2k+2-1=0\iff k=\frac{1}{2}$$

Por tanto,

- r y s se cortan $\iff k=\frac{1}{2}$
- r y s se cruzan $\forall\, k\neq\frac{1}{2}$

2. $$d(r,s) = \begin{cases} 0 & si \quad k = \frac{1}{2} \\ d(r,s) = \dfrac{|[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} & si \quad k \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

2. $$d(r,s)=\begin{cases} 0 & si \quad k=\frac{1}{2} \\ \\ d(r,s)=\dfrac{|[\overrightarrow{RS},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|} & si \quad k\neq\frac{1}{2} \end{cases}$$

- Si $k\neq\dfrac{1}{2}$:

$$|[\overrightarrow{RS},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|=|\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & k-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}|=|-2k+1|$$

$$\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(-2,0,-2)\Longrightarrow |\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=2\sqrt{2}$$

2. $$d(r,s)=\begin{cases} 0 & si \quad k=\frac{1}{2} \\ d(r,s)=\dfrac{|[\overrightarrow{RS},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|} & si \quad k\neq\frac{1}{2}\end{cases}$$

   - Si $k\neq\dfrac{1}{2}$:

$$|[\overrightarrow{RS},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]| = |\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & k-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}| = |-2k+1|$$

$$\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2,0,-2) \implies |\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}| = 2\sqrt{2}$$

$$d(r,s)=\frac{|-2k+1|}{2\sqrt{2}}$$