Resolución de Problemas del Bloque de Geometría

Geometría Analítica en el Espacio (II)
Ejercicio 29

IES O Couto

curso 2019-2020

Ejercicio 29

Dadas las rectas $r : \dfrac{x-1}{2} = y = a - z$ y $s : \dfrac{x+1}{3} = y - 2 = z$, se pide:

a) Hallar el valor de a para que se corten en un punto, y para dicho valor, encontrar la ecuación el plano π que las contiene.

b) Hallar la ecuación de la recta proyección de la recta $t : x = \dfrac{y}{2} = -\dfrac{z}{3}$ sobre el anterior plano π.

Apartado a)

- $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-a}{-1} \implies r$ tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, -1)$, y pasa por $R = (1, 0, a)$

Apartado a)

- $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-a}{-1} \implies r$ tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, -1)$, y pasa por $R = (1, 0, a)$
- $s : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-0}{1} \implies s$ tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (3, 1, 1)$, y pasa por $S = (-1, 2, 0)$

Apartado a)

- $r: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-0}{1}=\dfrac{z-a}{-1} \Longrightarrow r$ tiene vector director $\overrightarrow{u_r}=(2,1,-1)$, y pasa por $R=(1,0,a)$
- $s: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-0}{1} \Longrightarrow s$ tiene vector director $\overrightarrow{u_s}=(3,1,1)$, y pasa por $S=(-1,2,0)$
- Para que r y S sean secantes, dado que $\overrightarrow{u_r} \nparallel \overrightarrow{u_s}$, es necesario y suficiente que $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{u_r}$, y $\overrightarrow{u_s}$ sean coplanarios, o equivalentemente, que $[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]=0$:

Apartado a)

- $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-a}{-1} \Longrightarrow r$ tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, -1)$, y pasa por $R = (1, 0, a)$
- $s: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-0}{1} \Longrightarrow s$ tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (3, 1, 1)$, y pasa por $S = (-1, 2, 0)$
- Para que r y S sean secantes, dado que $\overrightarrow{u_r} \nparallel \overrightarrow{u_s}$, es necesario y suficiente que $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{u_r}$, y $\overrightarrow{u_s}$ sean coplanarios, o equivalentemente, que $[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = 0$:

$$[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -a \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2-2a-6+3a-4-2 = a-14 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a = 14$$

Apartado a)

- $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-a}{-1} \implies r$ tiene vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, -1)$, y pasa por $R = (1, 0, a)$
- $s: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-0}{1} \implies s$ tiene vector director $\overrightarrow{u_s} = (3, 1, 1)$, y pasa por $S = (-1, 2, 0)$
- Para que r y S sean secantes, dado que $\overrightarrow{u_r} \not\parallel \overrightarrow{u_s}$, es necesario y suficiente que $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{u_r}$, y $\overrightarrow{u_s}$ sean coplanarios, o equivalentemente, que $[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = 0$:

$$[\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -a \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2-2a-6+3a-4-2 = a-14 = 0 \iff$$

$$\iff a = 14$$

- Para cualquier $P = (x, y, z)$ perteneciente al plano Π que contiene a r y a s, se cumple $[\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = 0$:

$$\Pi : [\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi : \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Pi : [\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi : \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \Pi : 2(x+1) - 5(y-2) - z = 0 \Longleftrightarrow \Pi : 2x - 5y - z + 12 = 0$$

$$\Pi : [\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi : \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \Pi : 2(x+1) - 5(y-2) - z = 0 \Longleftrightarrow \Pi : 2x - 5y - z + 12 = 0$$

Apartado b)

$$\Pi : [\overrightarrow{SP}, \vec{u_r}, \vec{u_s}] = 0 \iff \Pi : \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \Pi : 2(x+1) - 5(y-2) - z = 0 \iff \Pi : 2x - 5y - z + 12 = 0$$

Apartado b)

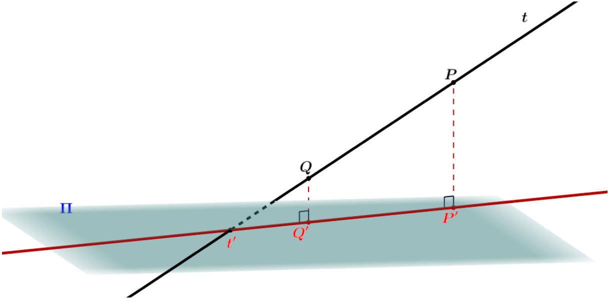
La proyección de la recta t sobre el plano Π es la recta t', contenida en Π, y que se obtiene al proyectar perpendicularmente sobre Π todos los puntos de t

$$\Pi : [\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = 0 \Longleftrightarrow \Pi : \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \Pi : 2(x+1) - 5(y-2) - z = 0 \Longleftrightarrow \Pi : 2x - 5y - z + 12 = 0$$

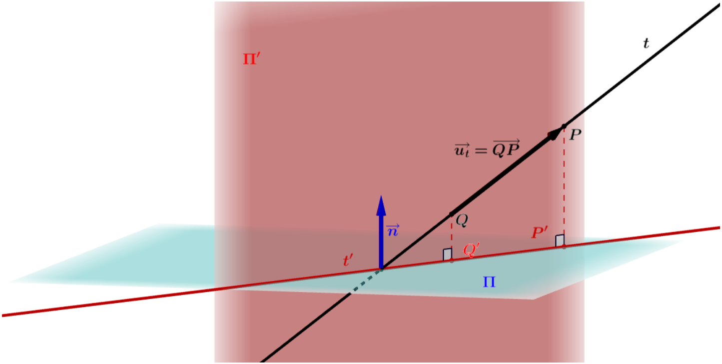
Apartado b)

La proyección de la recta t sobre el plano Π es la recta t', contenida en Π, y que se obtiene al proyectar perpendicularmente sobre Π todos los puntos de t

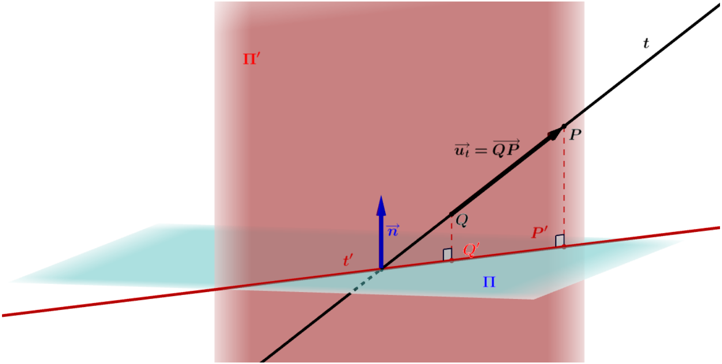


- La forma más rápida de obtener t' es intersecando Π con el plano perpendicular a Π que contiene a t, Π'

- La forma más rápida de obtener t' es intersecando Π con el plano perpendicular a Π que contiene a t, Π'



- La forma más rápida de obtener t' es intersecando Π con el plano perpendicular a Π que contiene a t, Π'



- El plano Π' será el plano que pasa por $P \in t$, y con vectores directores $\overrightarrow{QP}$ ($Q \in t$), y $\overrightarrow{n} = (2, -5, -1)$ (vector normal a Π).

- Las ecuaciones paramétricas de la recta t son $\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-3\lambda \end{array}\right.$.

- Las ecuaciones paramétricas de la recta t son $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -3\lambda \end{array}\right.$.

  Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 0 \implies Q = (0,0,0) \in t \\ \lambda = 1 \implies P = (1,2,-3) \in t \end{array}\right\} \implies \overrightarrow{u_t} = (1,2,-3)$$

- Las ecuaciones paramétricas de la recta t son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$.

  Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 0 \implies Q = (0,0,0) \in t \\ \lambda = 1 \implies P = (1,2,-3) \in t \end{array}\right\} \implies \vec{u_t} = (1,2,-3)$$

- Cualquier punto $A = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ verificará que $\overrightarrow{QA}, \vec{n}, \overrightarrow{QP}$ son coplanarios. Es decir:

- Las ecuaciones paramétricas de la recta t son $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -3\lambda \end{array}\right.$.

  Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 0 \implies Q = (0,0,0) \in t \\ \lambda = 1 \implies P = (1,2,-3) \in t \end{array}\right\} \implies \overrightarrow{u_t} = (1,2,-3)$$

- Cualquier punto $A = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ verificará que $\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{QP}$ son coplanarios. Es decir:

$$\Pi' : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff \Pi' : -17x - 5y - 9z = 0$$

- Las ecuaciones paramétricas de la recta t son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$.

  Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 0 \implies Q = (0,0,0) \in t \\ \lambda = 1 \implies P = (1,2,-3) \in t \end{array}\right\} \implies \vec{u_t} = (1,2,-3)$$

- Cualquier punto $A = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ verificará que $\overrightarrow{QA}, \vec{n}, \overrightarrow{QP}$ son coplanarios. Es decir:

$$\Pi' : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff \Pi' : -17x - 5y - 9z = 0$$

- La recta t' tiene ecuación implícita

$$t : \begin{cases} 2x - 5y - z + 12 = 0 \\ 17x + 5y + 9z = 0 \end{cases}$$